SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
FACOLTÀ DI MEDICINA E PSICOLOGIA
DIPARTIMENTO DI PSICOLOGIA DEI PROCESSI DELLO SVILUPPO E DELLA SOCIALIZZAZIONE

DOTTORATO DI RICERCA IN
PSICOLOGIA SOCIALE, DELLO SVILUPPO E DELLA RICERCA EDUCATIVA
XXXI CICLO

TESI DI DOTTORATO:

Problemi matematici e convinzioni degli insegnanti di scuola primaria

Anno accademico 2017-2018

Dottoranda:

Annarita Monaco

Tutor:

Chiar.ma prof.ssa
Franca Rossi

Chiar.mo prof.
Guido Benvenuto

Indice

Capitolo quarto – Le sfide nazionali e internazionali

Parte seconda – La ricerca

Capitolo quinto – L'oggetto della ricerca

Capitolo sesto – La metodologia e gli strumenti della ricerca

Capitolo settimo – L'analisi dei dati e l'interpretazione dei risultati

A tutti quegli Studiosi
mossi dal desiderio
di Sapere,
e con l'intento
di Aiutare,
con Amore
e Rigore,
a Capire.

Introduzione

Gran parte del tempo, nelle ore di matematica alla primaria, è dedicato all'espletamento di esercizi scritti, utili per consolidare l'acquisizione, la verifica, il consolidamento di regole e tecniche apprese in aula. Le proposte dei cosiddetti "problemi" sono spesso null'altro che esercizi (D'Amore, 2014, p. 20) e ben poco mettono in gioco le componenti noetiche, strategiche, comunicative e semiotiche dell'apprendimento matematico, al più quelle algoritmiche (Fandiño Pinilla, 2008).

I libri di testo spesso contengono pagine e pagine di problemi (in realtà esercizi) già proposti con la classificazione di: problemi di addizione, di sottrazione, di calcolo delle frazioni, senza soluzione o impossibili, e via dicendo, per affrontare i quali non appare necessario alcun atto strategico o creativo dell'alunno, essendo già stato implicitamente suggerito l'itinerario risolutivo per forzare l'ottenimento di un comportamento considerato soddisfacente da parte dell'allievo.

Eppure, nel testo delle Indicazioni Nazionali (2012, p. 49), nella parte della premessa, si legge:

«Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola. Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che s'intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive».

Ci sono concetti chiave nel testo citato che possono far riflettere i docenti e orientare le loro scelte, sia rispetto alle caratteristiche dei problemi da proporre agli alunni, sia sulle metodologie e strategie da utilizzare nel corso delle attività: discussione, argomentazione, contesto autentico e significativo legato alla vita quotidiana sono alcuni tra essi. Ma ciò che si auspica nella premessa si attua effettivamente? Nelle aule scolastiche è ancora poco presente un ambiente di apprendimento che privilegia attività di risoluzione di problemi, significativi al punto da permettere ai bambini di entrare in gioco con pensieri, parole, personali rappresentazioni e che li vedano coinvolti in discussioni attive e costruttive, alla ricerca di argomentazioni che giustifichino le loro scelte. Svariate sono le difficoltà che i docenti incontrano nel corso del loro lavoro, sulla matematica in generale e sui problemi nello specifico: il timore di non riuscire a trasmettere i numerosi contenuti previsti nel curricolo di matematica; la preoccupazione di non riuscire ad aiutare bambini che non sanno o si rifiutano di risolvere un problema, soprattutto quando esso ha la pretesa di richiedere la messa in gioco di capacità strategiche e creative. Gli insegnanti spesso si chiedono: come fare ad insegnare le strategie utili per poter risolvere i diversi problemi? Si possono insegnare le strategie? Quali strategie? E se gli alunni ne inventano di nuove, come fare per seguirle e verificarle, dal momento che non sempre posseggono competenze matematiche specifiche? Spesso gli insegnanti non trovano risposte utili a risolvere tali questioni, e così molti di loro propongono ai loro alunni i problemi che sanno di poter controllare e gestire. Escludono invece quei problemi che richiederebbero ai bambini di sperimentare "al buio", forse perché tale situazione può attivare in loro stessi dei timori e delle insicurezze. A questo proposito, leggiamo Bernardi (1998, pp. 2-3):

> «Io credo che, in una qualche misura, la paura della matematica sia trasmessa, in maniera indiretta e del tutto involontaria, proprio da noi insegnanti [...]. È fuori discussione che un buon insegnante prepari accuratamente le lezioni e che assegni un compito solo dopo aver provato lui stesso a svolgerlo. Ciò premesso, quante volte siamo disposti a parlare con gli studenti di un problema di cui non sappiamo la soluzione? Temo che molti di noi preferiscano non misurarsi nella risoluzione di un problema di fronte agli studenti. Questo atteggiamento, fra l'altro, favorisce l'idea di una matematica in cui non ci sono problemi aperti: non so se l'insegnante che evita accuratamente di farsi cogliere incerto riscuoterà la stima dei suoi allievi. Ma so che non farà amare la matematica. David Tall, noto studioso di didattica della matematica, racconta che, di tanto in tanto, propone ai suoi studenti sessioni di problem solving, in cui, dopo aver distribuito enunciati di vari problemi di alcuni dei quali non conosce la soluzione, si siede in disparte limitando al massimo i suoi interventi (chi lo conosce sa quanto deve costargli)».

Ci sono però anche insegnanti che decidono di far evolvere la loro didattica nella direzione di una disponibilità ad accogliere, in ambienti di apprendimento collaborativi e significativi, le potenzialità strategiche, comunicative e rappresentative dei bambini, al fine di conoscerle, valorizzarle, amplificarle, creando quel circolo virtuoso di intrecci comunicativi e metacognitivi che possono modificare completamente il modo di affrontare i problemi matematici. Capita a molti insegnanti di trovarsi di fronte il *problema dei problemi*: alunni che rinunciano a pensare nel momento in cui viene posto loro un problema. Nulla è più frustrante per un insegnante: non sapere quale strada seguire per aiutare i propri alunni in un momento di difficoltà. Può capitare, nel corso di una conversazione o di una intervista, che i ragazzi manifestino il loro non amore per i problemi matematici e che l'insegnante scopra che sono proprio i dispositivi didattici che ha utilizzato a mettere gli alunni più in difficoltà: l'uso di schemi, per esempio, ritenuti falsamente funzionali alla risoluzione di problemi con più operazioni, la sottolineatura dei dati, la cerchiatura delle parole chiave. La presentazione di strategie e di rappresentazioni, che nella convinzione del docente può facilitare il percorso dei suoi allievi nella risoluzione del problema, di fatto può inibire gli alunni, perché essi si sentono forzati, costretti, condizionati dall'applicazione di schemi e sottoschemi, che si rivelano essere per loro una gabbia e non un sussidio costruttivo, stimolante e soddisfacente; più utile, soprattutto, agli alunni. Zan (1998, pp. 2-3) scrive:

«Il bravo insegnante non è più colui che segue in modo attento e preciso le indicazioni che qualcun altro (pedagogista, matematico, didattico) ha esplicitato: bravo insegnante è piuttosto colui che sa individuare e risolvere problemi, che sa prendere decisioni. In questo senso ogni insegnante è anche un po' ricercatore, anche se ha una minor libertà nella *scelta* dei problemi, che scaturiscono in modo naturale dal suo lavoro in classe [...]».

Il mio progetto di ricerca si propone di capire se e quanto gli insegnanti di scuola primaria possano migliorare la loro pratica didattica sui problemi matematici, facendo emergere e valorizzando le intuizioni strategiche e rappresentative dei loro allievi, in un ambiente di apprendimento che dia priorità alla discussione e all'argomentazione, mentre affrontano problemi significativi e autentici, in un clima positivo di fiducia e di ricerca priva di ogni timore. Ciò è quello che si auspica anche nel testo della premessa delle Indicazioni Nazionali per il curricolo del 2012.

Accade spesso che la formazione dei docenti si basi sulla convinzione che gli insegnanti abbiano bisogno solo di essere "preparati" su uno o più argomenti della disciplina che non conoscono o che conoscono poco.

Vannini (2012, pp. 49-50) scrive:

«Il processo di esplicitazione delle convinzioni latenti- in contesti di formazione iniziale e in servizio degli insegnanti- è, a questo proposito, la via maestra da percorrere […]. La formazione degli insegnanti (sia iniziale, sia in servizio) dovrebbe sempre partire da far esplicitare ai docenti le proprie credenze, al fine di poter agire su di esse attraverso processi di razionalità, atti ad analizzare e a mettere in crisi convinzioni connesse a pratiche inefficaci e a valori evidentemente non in sintonia con una scuola democratica e a costruire nuove convinzioni e atteggiamento pedagogicamente fondati».

Anche Rosetta Zan (2010², p. 274) esamina il ruolo dei diversi fattori, in particolare delle convinzioni, che condizionano le decisioni del docente:

«Ma se l'insegnamento si configura come situazione di problema piuttosto che di routine, e se quindi l'insegnante si trova a dover prendere continuamente decisioni […] le decisioni prese dall'insegnante saranno influenzate dalle sue conoscenze, ma anche dalle sue abilità metacognitive, dalle sue convinzioni, e dalle sue emozioni. Questo approccio porta in modo naturale a porsi una serie di domande, cruciali in ottica di formazione: qual è il repertorio di conoscenze che un insegnante di matematica deve avere per poter prendere decisioni adeguate? Quali convinzioni ed emozioni sono da considerarsi vincenti, e quali perdenti? […]. Ma è soprattutto sulle *convinzioni* che si è concentrata l'attenzione della ricerca più recente sull'insegnamento […]».

La tesi di dottorato qui presentata, dunque, ha come oggetto di studio le convinzioni che i docenti di scuola primaria hanno sui problemi matematici, sulla loro risoluzione e sulle idee che ispirano la pratica didattica ad essi relativa, in relazione anche all'interpretazione di alcune parole chiave delle Indicazioni Nazionali. Si intende individuare, ed analizzare, sia quegli elementi che caratterizzano e discriminano i problemi l'uno dall'altro, sia quegli elementi che intervengono nelle decisioni didattiche dei docenti, le loro origini e i loro significati, al fine di comprendere meglio il perché a volte i docenti mostrino così tante resistenze al cambiamento e non riescano a far proprie pratiche didattiche innovative che pure dichiarano di apprezzare e che sono molto più adeguate ai bisogni cognitivi ed espressivi degli allievi. Illustro di seguito il piano della tesi dottorale.

L'introduzione ha lo scopo di descrivere le ragioni personali e professionali che hanno motivato l'orientamento verso uno specifico argomento di ricerca.

Nella prima parte della tesi è passata in rassegna, nel primo capitolo, una parte della letteratura relativa agli studi sui problemi e sul problem solving, con attenzione alla terminologia che ne specifica le caratteristiche e in relazione alla pratica scolastica, al ruolo del docente, alle sue convinzioni, atteggiamenti, emozioni.

Nel secondo capitolo si esamina la letteratura sul concetto di convinzione (*belief*), approfondito nelle sue peculiarità ma anche nei suoi rapporti con le conoscenze, gli atteggiamenti, le emozioni.

Nel terzo capitolo si focalizza l'attenzione sulle convinzioni degli insegnanti di matematica rispetto ai problemi e alla loro pratica didattica e si presentano tre ricerche internazionali, interessanti per le tematiche di studio affrontate, le metodologie utilizzate e le problematiche aperte proposte all'attenzione dei ricercatori.

Nel quarto capitolo si presentano alcuni documenti di respiro internazionale, che inquadrano la tematica del problem solving nel contesto più ampio delle competenze europee e guideranno l'interpretazione dei dati della ricerca.

Nella seconda parte, al primo capitolo, è definito l'oggetto della ricerca e sono presentate domande e sottodomande.

Il capitolo secondo presenta la metodologia e gli strumenti della ricerca, con tre paragrafi specifici dedicati alla descrizione delle caratteristiche degli insegnanti partecipanti all'intervista appositamente costruita, ai problemi messi a punto e presentati, all'analisi dei docenti.

Nel capitolo terzo è effettuata l'analisi delle risposte dei docenti: si descrive il processo che ha portato dalla trascrizione delle interviste all'analisi del contenuti; si presentano e interpretano i risultati.

Nel capitolo quarto, che chiude la seconda parte, sono presentate la discussione dei risultati, la disamina delle possibili implicazioni didattiche e infine l'individuazione di problemi aperti e di possibili direzioni di ricerca future.

In Appendice sono inseriti due allegati: l'allegato A, che è il testo dell'intervista, e l'allegato B, che è la trascrizione integrale di un'intervista, portato come esempio.

Parte prima:

Esame della letteratura

Capitolo primo

I problemi matematici

1.1. Che cos'è un "problema"

Nell'insegnamento della Matematica non c'è forse pratica didattica così diffusa e riconosciuta importante come la risoluzione dei problemi, spesso associata dagli adulti al ricordo della propria esperienza con questa disciplina (Zan, 2016, p. 19). Ma che cosa si intende per problema matematico?

Kanizsa (1973) scrive che un problema sorge quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in modo automatico, meccanico o mediante un comportamento istintivo o appreso.

Zan (2010^2, pp. 122-123) considera:

«Potremmo dire che il problema appare più che altro come una rottura di un equilibrio preesistente: in questo senso, anche se non viene definito esplicitamente un obiettivo da raggiungere, si può considerare obiettivo implicito il ripristino del precedente equilibrio […]».

Polya (62, tr. it., vol. 2, p. 272) scrive: «Abbiamo un problema. Vale a dire abbiamo una meta A che non possiamo raggiungere immediatamente e siamo alla ricerca di qualche azione atta a farcela raggiungere».

Il punto di vista di Duncker, psicologo della Gestalt (1935, cit. da Zan, 2010^2, p. 123) è il seguente: «Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla».
In tale definizione possiamo osservare alcune cose interessanti. Innanzitutto, per parlare di problema ci deve essere un soggetto che vive una situazione come problema; il problema non si pone pertanto come dato oggettivo, una situazione di per sé non è un problema: lo è per un certo soggetto; qui si parla esplicitamente di "meta", cioè di uno scopo, di un obiettivo. Quindi non ci può essere problema se non c'è un obiettivo, ma anche: una stessa situazione può dare origine a problemi diversi a seconda dell'obiettivo che un soggetto si pone […]. Riassumendo, la definizione di Duncker fa riferimento esplicito ad una persona, ad una meta, alla presenza di un ostacolo, mettendo in luce una dimensione soggetti-

va del problema e una dimensione temporale» (Zan, 2010[2], p. 123). Come si vede, non si tratta di definizioni, ma di precisazioni, di puntualizzazioni: non c'è problema se non c'è una situazione problematica che crea una domanda, per rispondere alla quale ci deve essere qualche motivo di difficoltà (D'Amore e Fandiño Pinilla, 2006, p. 649). Ma si tratta di una distinzione sofisticata, con molte sfumature.

Approfondiamo ancora, citando le parole di D'Amore e Fandiño Pinilla, (2006, p. 648):

«Solitamente gli esercizi di tipo scolastico sono del tutto fittizi. Quel Pierino che va al mercato con 2 euro per comprare delle uova e che poi ne rompe 3, non esiste e, se non per finta, nessun bambino della classe si identifica con lui: la situazione è credibile, ma fittizia, non vissuta. Invece, una spesa per la gita da dividere in 16 può essere davvero una situazione problematica vissuta nella realtà, da cogliere a volo per sollecitare analisi matematiche. Si tratta di dire bene i termini della questione, in lingua; farsene un'immagine mentale; far sì che ogni bambino abbia un modello matematico della questione; e poi passare alla soluzione concreta; quanti soldi chiedere ai propri genitori per la gita. Non occorre che la situazione sia vissuta proprio in prima persona; la cosa è molto più sottile e la motivazione gioca un ruolo non secondario. Facciamo un esempio. In una classe interessata, la costruzione della successione di Fibonacci 1,1,2,3,5,8,13,… (legata alla storia e, nella fattispecie, all'aumento della popolazione delle coppie di conigli in un allevamento), è stata introdotta in modo fittizio sì (perché nella realtà nessuno dei bambini aveva dei conigli), ma con tale presa emotiva (lo "sfondo" era stato vissuto con grande vivacità) da divenire problema: ciascuno voleva portare il suo contributo personale che andava ben al di là del semplice computo aritmetico».

Ma qual è la differenza di significato tra "situazione problematica" e "problema"?

«Nel modello di Boero, la situazione problematica è il "significato del testo", e il testo è solo un "sistema di segni" che la codifica. Nel modello di Borasi, la situazione problematica è il contesto in cui ha senso il problema posto» (Boero e Ferrari, 1988, p. 667).

D'Amore, Fandiño Pinilla e Marazzani (2004, p. 74) distinguono un problema da un "esercizio anticipato": si tratta di una differenza di natura scolastica. L'esercizio anticipato è un esercizio standard, di uso e consumo molto routinario nella scuola, ad un certo punto dell'iter scolastico; solo che viene proposto come testo-stimolo prima di quel momento. Nel testo-stimolo, contenuto in un esercizio anticipato, non ci devono essere simboli formali sconosciuti o, più in generale, termini o altro illeggibili e deve essere scelto in modo tale che chi lo riceve sia in grado di capire almeno il senso del testo scritto ed il senso della richiesta. Blum e Niss (1991, cit. in Andrews & Xenofontos, 2014; nostra trad., p. 301) distinguono tra "problemi incorporati nella matematica stessa" e "problemi situati nel mondo reale". I problemi matematici possono essere sia puramente matematici che applicati (Haylock e Cockburn, 2008, cit. in ibid.). Tale distinzione è sia logica che funzionale, perché lo stesso compito può esistere in entrambi i domini, a seconda di come viene presentato. I problemi matematici applicati, in genere interpretati come situati in un certo senso nel mondo reale e presentati in forma verbale e narrativa, hanno attirato molto l'attenzione dei ricercatori e rappresentano il contesto più comune in cui ci si aspetta che i bambini applichino le loro conoscenze matematiche (Briars e Larkin, 1984; Chapman, 2006, cit. in ibid.).

1.1.1. Problemi e esercizi

A scuola, e anche sui libri di testo, sono denominati "problemi" dei compiti che in realtà non sono veramente tali. Molti di essi sono esercizi, e non problemi. Approfondiamo la differenza tra esercizi e problemi, utilizzando le parole di D'Amore e Fandiño Pinilla (2006, p. 647):

> «[…] Entrambi concernono situazioni problematiche causate da vari fattori: una proposta dell'insegnante (più o meno motivata), test o quiz, effettiva e reale situazione nella quale l'alunno o la classe si ritrova,… Ma: gli esercizi possono essere risolti utilizzando regole o nozioni già apprese o in via di consolidamento e quindi rientrano nelle categorie: rafforzamento o verifica; i problemi coinvolgono o l'uso di regole o nozioni (alcune anche in via di esplicitazione proprio in quell'occasione) o la successione di operazioni la cui scelta è atto strategico, talvolta creativo, dell'allievo stesso».

L'esercizio, infatti, si svolge nella zona effettiva di Vygotskij, mentre il problema si svolge nella zona prossimale. Quando si parla di livello di "sviluppo effettivo" ci si riferisce a quelle competenze che il bambino domina da solo, a quelle conoscenze che ha già. Per descrivere il livello di "sviluppo potenziale" si deve immaginare un bambino che è di fronte a un problema o ad un esercizio, quando è fermo o dichiara di non sentirsi capace. Si potrebbe pensare che il livello di difficoltà di quel problema sia superiore al suo sviluppo effettivo, ma potrebbe non essere così.

Come spesso capita nella pratica didattica, l'insegnante "dà una mano", un piccolo spunto, ed è allora che può scattare un meccanismo per il quale il bambino si sblocca e arriva poi a completare la soluzione. Ma cosa è successo? Il bambino è entrato in una "zona" che supera il suo sviluppo effettivo e che è nuova, alla quale ora (che ha risolto il problema nuovo, o in un futuro più o meno prossimo) giungerà, e per questo si chiama "potenziale". Quella parte di sviluppo potenziale nella quale si sta agendo prende il nome di "zona di sviluppo prossimale" (Fandiño Pinilla, 2008, p. 68).

Secondo Vygotskij (cit. in ibid.) «ciò che i bambini sanno fare con l'assistenza di altri potrebbe essere in un certo senso ancora più indicativo del loro sviluppo mentale di quel che sanno fare da soli».

Negli esercizi i bambini attivano un procedimento puramente esecutivo; nei problemi è necessario un comportamento strategico: si devono prendere continuamente decisioni, mettendo in gioco, eventualmente, anche regole apprese e automatismi consolidati attraverso gli esercizi.

Esercizi e problemi rappresentano attività complementari per la maturazione delle competenze matematiche. Entrambi sono necessari all'insegnamento e rispondono ad obiettivi diversi dell'insegnante (Di Martino, Zan, 2017).

Di seguito la tabella 1 riporta un confronto puntuale, messo a punto dai due autori citati, tra esercizi e problemi.

Esercizi	*Problemi*
Chi li affronta sa già quale procedura applicare per raggiungere l'obiettivo.	Chi li affronta non sa a priori quale procedura permette di raggiungere l'obiettivo.
Prevedono un comportamento esecutivo e riproduttivo.	Richiedono di prendere decisioni, e quindi un comportamento strategico.
L'*errore* è indicatore di un'applicazione scorretta della procedura.	L'*errore* può essere parte del percorso risolutivo e va dunque messo nel conto.
Il *tempo* è quello dell'esecuzione della procedura.	È necessario *tempo*: per riflettere, per comprendere, per esplorare, per congetturare
Permettono di lavorare su conoscenze e abilità. Le competenze coinvolte si limitano all'applicazione corretta della procedura.	Permettono di lavorare su conoscenze e abilità, di adattarle a situazioni nuove, ovvero di mettere in gioco *competenze.*

Tabella 1*: Differenze tra esercizi e problemi (Di Martino e Zan, 2017)*

1.2. I problemi nella pratica scolastica

Centriamo ora la nostra attenzione sui problemi che solitamente si propongono a scuola. Non è semplice il rapporto che gli alunni hanno con i problemi, a causa di varie difficoltà che incontrano nel risolverli. Di conseguenza, gli insegnanti vivono spesso con preoccupazione la gestione della pratica didattica dei problemi. Leggiamo in Zan (2016, pp. 19-20):

«Durante l'esperienza scolastica l'attività con i problemi viene vissuta di frequente con un senso di malessere da molti allievi [...]. D'altra parte, anche l'insegnante può vivere con disagio l'attività in classe con i problemi. I comportamenti degli allievi, infatti, evidenziano delle difficoltà importanti su cui è difficile intervenire: sembra mancare il controllo sui processi risolutivi, sulle risposte, addirittura sembra a volte che il bambino non abbia capito cosa gli viene chiesto, o di cosa parla il problema. Alcune risposte in particolare mettono in evidenza una preoccupante dissociazione dalla realtà, una sospensione di senso (Schoenfeld, 1991) che sembra suggerire una netta frattura tra il modo in cui l'allievo affronta i problemi reali e quello in cui affronta i problemi scolastici […]».

In letteratura è famoso il seguente problema: «*Su una nave ci sono 26 pecore e 10 capre; quanti anni ha il capitano*?». È il capostipite dei cosiddetti problemi assurdi, ormai ben noti come *L'età del capitano.* Proposto per la prima volta in Francia, ha dato vita a un filone di ricerca molto ricco sul ruolo che hanno le dinamiche allievi-insegnante nel contesto scolastico (Chevallard, 1988, cit. da Zan 2016, p. 21): la maggior parte degli allievi di scuola primaria infatti "risolve" in qualche modo questo problema dando una risposta numerica (36), ottenuta scegliendo fra le operazioni note quella la cui applicazione porta a risultati verosimili.

Per poter interpretare tali risposte e comportamenti degli alunni, sono state effettuate moltissime ricerche didattiche, che non solo hanno permesso di comprendere questi fenomeni, ma hanno anche offerto strumenti per interpretare alcune difficoltà che gli allievi incontrano nell'attività di risoluzione dei problemi.

È stato messo, per esempio, in evidenza il ruolo di alcuni elementi fondamentali dei problemi proposti a scuola e presenti sui libri di testo (Zan, 2016, p. 22): i cosiddetti problemi "standard".
I problemi a scuola non assomigliano a problemi di situazioni di vita reale e non sono considerati dai bambini stessi legati al mondo reale; semplicemente vengono accettati come parte del rituale scolastico. (Nesher, 1980, p. 42). Ad alcuni bambini fu chiesto di inventare delle storie corrispondenti a operazioni date e loro non proposero situazioni di vita reale. A Johnny (seconda elementare) venne proposta la frase matematica: 1+6 = 7 (Nesher, 1987; inedita, cit. da Nesher, 1980, p. 42) e lui rispose: «La mamma ha comprato un ferro da stiro e poi ha comprato altri 6 ferri da stiro. Ora possiede 7 ferri da stiro». Sembra emergere, in questo caso, più la preoccupazione da parte del bambino di soddisfare il suo ruolo di "rispondente", piuttosto che di monitorare la plausibilità della sua storia.

Gli insegnanti che propongono problemi verbali in aritmetica credono che tali problemi permettano ai bambini di sperimentare situazioni di vita reale, mentre per loro rappresentano un compito scolastico irrilevante, in cui si devono fare alcuni calcoli, a partire da dati verbali dati.

Alcuni aspetti dei testi scolastici possono spiegare la loro natura stereotipata: semantici, referenziali e stilistici.Per quanto riguarda l'aspetto semantico, interpretare le stesse voci linguistiche nel contesto dei problemi scolastici verbali non è lo stesso che interpretare le stesse parole in un altro contesto; la conoscenza che il bambino possiede degli elementi lessicali dati dalla lingua comune non sempre facilita la sua comprensione del testo del problema scolastico. Per quanto riguarda l'aspetto referenziale, gli oggetti descritti nei problemi non sono oggetti reali per i bambini, ma si tratta di oggetti diversi, soggetti a regole diverse che il bambino apprende a scuola.

Rispetto all'aspetto stilistico, si ha solitamente la necessità di dare, in un problema scolastico, tutte le informazioni richieste e c'è la tendenza a creare un testo il più abbreviato possibile; siamo spesso di fronte a testi laconici, molto concisi e con strutture sintattiche molto difficili. Quindi i testi sono stereotipati nello stile, nell'interpretazione semantica e descrivono oggetti ed eventi che non hanno alcuna realtà (ibid.).

Nel caso del problema scolastico, a differenza di quel che accade nei problemi che si presentano nella realtà, chi risolve il problema (l'allievo) è una persona diversa da chi pone il problema (l'insegnante). Ciò rende necessario che venga attuata una mediazione del testo; nel caso della pratica didattica è un testo scritto, nel quale è presente una domanda. I problemi utilizzati nella pratica didattica, dunque, sono per lo più problemi verbali; il testo di un problema si presenta come un testo molto particolare che ha un suo proprio genere letterario (Gerofsky, 1996, cit. da Zan, 2016, p. 23).

Greer e collaboratori (2002, p. 271, cit. in ibid.) ne parlano come di un testo che contiene tipicamente informazioni quantitative, che descrive una situazione familiare a chi legge e che pone una domanda quantitativa, alla quale si può rispondere eseguendo operazioni matematiche sui dati forniti dal testo oppure ricavati in un altro modo. La situazione ritenuta familiare a chi legge generalmente è chiamata "contesto". In realtà, se si chiede a un contesto di essere "familiare", anche un contesto interno alla matematica può essere ritenuto tale, purché gli allievi abbiano effettuato sufficienti esperienze con esso (Zan, 2016, p. 23).

Si consideri, per esempio, il seguente testo di problema:

«Considera il numero 15. Raddoppialo, poi raddoppia il risultato, poi continua a raddoppiare. In questo modo, arrivi a trovare tutti i multipli di 15? Scegli la risposta e completa la frase: Si, perché… No, perché…».

Un problema di questo tipo ha un grande valore, in quanto permette di lavorare su importanti competenze matematiche, quali il congetturare e l'argomentare. Problemi di questo tipo, però, sono proposti poche volte agli allievi nella scuola primaria, in quanto sono considerati astratti e difficili (Zan, 2016, p. 23).

Nella pratica didattica si tende a privilegiare problemi nei quali la struttura matematica sia contestualizzata in una situazione familiare ma anche realistica, che fa riferimento alla vita extrascolastica degli allievi. Tale scelta, condivisa da insegnanti, libri di testo e Indicazioni Nazionali, si fonda sulla convinzione che richiamare il vissuto dell'allievo, e quindi le conoscenze del suo mondo, motivi gli allievi e faciliti i processi di comprensione e di risoluzione del problema. (Zan, 2016, p. 24).

Molti ricercatori ritengono che il contesto tipico dei problemi standard in realtà non proponga situazioni effettivamente realistiche e familiari per l'allievo e di conseguenza non riesca a richiamare il loro vissuto né la loro conoscenza del mondo. Le situazioni descritte nei problemi standard, infatti, sono a volte platealmente lontane dal mondo reale e dal vissuto dei bambini (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000, cit. da Zan, 2016, p. 24).

Il collegamento del problema alla situazione descritta si riduce al fatto che, per dare una risposta, occorre utilizzare le informazioni quantitative esplicitate nel testo. L'autore del problema ha in mente la struttura matematica su cui vuole far lavorare l'allievo ed è a partire da essa che sceglie il contesto in cui inserirla e la domanda da porre. Sceglie quindi una situazione di vita reale o finto-reale che richiede l'applicazione della struttura matematica e aggiunge sinteticamente le informazioni qualitative e quantitative necessarie per risolvere il problema secondo lo schema prestabilito sul quale sta ipotizzando il problema stesso (Nesher, 1980, cit. da Zan, 2016, p. 25).

Il testo di un problema standard, dunque, ha le seguenti caratteristiche (Zan, 2016, p. 25):
1) contiene solo i dati numerici necessari alla soluzione;
2) pone una domanda che in genere richiede una risposta numerica;
3) alla risposta si arriva combinando i dati numerici, utilizzando un procedimento matematico che spesso si riduce alla scelta di una delle quattro operazioni razionali;
4) sicuramente c'è una soluzione, che è unica;
5) i dati numerici del problema sono in genere artificiosi e semplificati rispetto a dati attesi in una situazione reale.

In sintesi, si forniscono tutti i dati perché ciò che interessa è vedere come l'allievo li combina per arrivare alla soluzione, e non come invece li seleziona per arrivare all'obiettivo di risolvere il problema.

Ciò rende rigido e stereotipato il modello dei problemi scolastici. A ciò si aggiunga la nota che sui libri di testo i problemi sono suddivisi in capitoli rigorosamente classificati a seconda dell'operazione aritmetica necessaria per risolverli. Nei testi scolastici i problemi sono riportati a conclusione di un'unità didattica, e pertanto come esercitazione esecutiva di una nozione appresa, anziché a introduzione, ossia come sperimentazione di un pensiero logico che, anche in assenza di strumenti, opera strategicamente per trovare soluzioni possibili.

Abbiamo parlato del comportamento degli autori dei problemi classici standard. Ma ancora più importante è il ruolo dell'insegnante nel momento in cui sceglie i problemi da proporre ai suoi alunni e le modalità con cui li utilizza. Se l'insegnante propone in aula solo i cosiddetti problemi "stereotipati", così come sono stati descritti, gli alunni si convinceranno che i dati che si trovano in quel problema sono quelli necessari alla soluzione del problema stesso, che ogni problema si può risolvere in un solo modo e che il risultato di ogni problema deve essere un numero facile che si ottiene dopo aver applicato l'operazione ritenuta più adatta, o magari l'ultima presentata in aula.

A tutto ciò si aggiungono le norme, implicite ed esplicite, che l'insegnante introduce per gestire l'attività sui problemi in classe e che fanno parte del "contratto didattico". Approfondiamo di seguito il concetto di contratto didattico e successivamente analizziamo il significato che esso può avere nella lettura e nell'interpretazione di alcuni tipici comportamenti che si manifestano in aula.

In tutte le situazioni didattiche l'insegnante tenta di far sapere agli allievi ciò che vuole che egli faccia. Teoricamente il passaggio dall'informazione e dalla consegna da parte dell'insegnante alla risposta attesa dovrebbe esigere che l'allievo metta in opera la conoscenza a cui mira, sia che essa sia in fase di costruzione sia che essa sia già posseduta.

Il solo mezzo che abbiamo di fare matematica è di cercare e di risolvere problemi specifici, e anche di porre nuove questioni. L'insegnante non deve comunicare una conoscenza, ma ottenere la "devoluzione" di un problema opportuno. In origine Brousseau (1986, cit. da Bolondi e Fandiño Pinilla, p. 66) definisce la devoluzione come «l'atto attraverso il quale l'insegnante fa accettare all'allievo la responsabilità di una situazione di apprendimento o di un problema ed accetta lui stesso le conseguenze di questo transfer». Se questa devoluzione avviene e l'allievo entra in gioco, è allora che si produce apprendimento, che è la posta in gioco (Brousseau, 2008, p. 4).

«Ma se l'allievo rifiuta o evita il problema, o non lo risolve, l'insegnante ha l'obbligo sociale di aiutarlo e a volte anche di giustificarsi per aver posto un problema troppo difficile. Ed è così che si stabilisce una relazione che determina

- in una piccola parte esplicitamente, ma soprattutto implicitamente - ciò che ciascun contraente, l'insegnante e l'allievo, ha la responsabilità di gestire e di cui sarà, in un maniera o nell'altra, responsabile nei confronti dell'altro. Questo sistema di obblighi reciproci rinvia a un contratto. Quello che qui ci interessa è il contratto didattico, cioè la parte del contratto che è specifica del "contenuto": la conoscenza matematica cui si mira […]. Si suppone che l'insegnante crei delle condizioni sufficientemente adeguate per l'appropriazione delle conoscenze e che debba "riconoscere" una tale appropriazione qualora essa si produca. Si suppone che l'allievo possa soddisfare queste condizioni. La relazione deve "continuare" ad ogni costo. L'insegnante deve assicurare dunque che gli apprendimenti precedenti e le nuove condizioni diano all'allievo la possibilità dell'acquisizione. Se questa acquisizione non si produce, si apre un processo all'allievo che non ha fatto ciò che è legittimo aspettarsi da lui ma si apre anche un processo all'insegnante che non ha fatto ciò a cui era (implicitamente) tenuto. Insistiamo sul fatto che questo gioco di obblighi non è esattamente un contratto: innanzitutto esso non può essere del tutto esplicitato dal momento che pretende di basarsi sul risultato dell'azione didattica. Non esistono dei mezzi reperibili e sufficienti per costruire dei saperi nuovi […]».

Ma un contratto di questo tipo, totalmente esplicito, è destinato a fallire. Le clausole di rottura e la posta del contratto non possono essere descritte in anticipo. Si svilupperà la conoscenza proprio quando saranno risolte le crisi nate da tali rotture, ma esse non possono essere predefinite. Nel momento in cui si crea la rottura, tutto procede come se un contratto implicito legasse l'insegnante e l'insegnato […]. Rivolta, negoziazione, ricerca di un nuovo contratto che dipende dal nuovo stato dei saperi: quelli acquisiti e quelli a cui si mira. Il concetto teorico, dunque, non è il contratto, ma il processo di ricerca di un contratto ipotetico (Brousseau, 2008, pp. 5-6).

Lo studio dei vari fenomeni di comportamento degli allievi, da questo punto di vista, ha dato frutti di grande interesse. Oggi possiamo spiegare, grazie al concetto di contratto didattico, molti comportamenti presenti in aula. All'interno della disciplina matematica, oltre alla conoscenza dei saperi, occorre saper gestire una loro rielaborazione cosciente e attiva, legata quindi alla motivazione e alla volizione, che ne permettano l'uso e l'interpretazione in situazioni problematiche e la padronanza di collegamenti tra contenuti diversi (Sbaragli, 2011, p. 149)

Quando l'allievo "osa", al di là delle consuetudini della vita d'aula, creando collegamenti tra conoscenze diverse, nasce l'idea del superamento della semplice conoscenza verso la competenza.

Spesso accade che le difficoltà degli allievi nel risolvere problemi spingano l'insegnante a decidere di proporre problemi analoghi in modo che l'allievo possa applicare la soluzione che gli è stata insegnata in un caso simile (Sbaragli, 2011, p. 150).

In questo caso l'allievo produce una risposta esatta, ma non perché egli abbia compreso la sua necessità matematica o logica a partire dall'enunciato, né perché egli abbia compreso e risolto il problema, e nemmeno perché abbia appreso un determinato oggetto matematico. Risponde esattamente perché è riuscito a stabilire una somiglianza con un altro problema; e non ha fatto altro che riprodurre una soluzione già strutturata da altri per lui. Crederà d'aver compreso la questione matematica in gioco, mentre non ha fatto altro che interpretare un'intenzione didattica espressa esplicitamente dall'insegnante e fornire la risposta attesa.

Come sostengono Brousseau e D'Amore (2008, p. 9):

> «Egli non ha bisogno di sapere se la sua risposta è adeguata, né perché; basta che essa sia conforme al modello. Egli può così rispondere, nell'ambito di un contratto didattico, senza comprendere perché la sua soluzione è corretta».

Questo "abuso dell'analogia" che Guy Brousseau ha messo in evidenza fin dagli anni '70, ma sul quale si basano ancora oggi molte azioni didattiche in aula, è una delle forme più correnti di quello che lui stesso definì "effetto Jourdain", uno degli effetti del contratto didattico (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sarrazy B., 2010).

Quando la risoluzione di problemi si vede in parte sostituita da uno studio di procedure di tali risoluzioni, Brousseau e D'Amore (2008, p. 10) parlano di uno scivolamento metadidattico:

> «Lo scivolamento metadidattico consiste per l'insegnante nello spostare l'oggetto del suo insegnamento da una attività o da una nozione, su uno dei suoi mezzi di controllo».

Abbiamo parlato del comportamento degli autori dei problemi classici standard. Ma ancora più importante è il ruolo dell'insegnante nel In questo comportamento rientra anche l'effetto *Topaze,* che rappresenta uno degli effetti del contratto didattico (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2009b, p. 39). L'insegnante non ha realmente interesse a che l'allievo apprenda, ma vuole ottenere che lui scriva in modo corretto quel che lui sta "dettando". Se l'allievo scriverà ciò che lui ha in mente, allora lui riterrà che la sua azione di insegnante ha avuto esito positivo. Non si preoccupa di quale sia il mezzo, né di se ci sia una reale comprensione. Questo fatto capita spesso in aula, in determinate situazioni nelle quali si propongono situazioni create artificialmente, a partire dalle quali si vuole fare in modo che l'allievo apprenda in modo generale, non legando l'apprendimento alla circostanza reale. Quanto è stato descritto rientra tra le attese del docente.

Nelle attese dell'allievo rientra il fatto che, una volta iniziata l'attività, non sarà tanto importante averla capita, quanto il fatto che lui riesca a raccogliere quei suggerimenti impliciti che porteranno l'allievo stesso a scrivere o a rispondere quel che l'insegnante vuole sentire da lui. Continuando tale ragionamento, avere successo in aula vuol dire aver reciprocamente onorato le due attese: l'insegnante ottiene quel che vuole e lo studente ottempera al suo compito. L'effetto specifico di questo processo si chiama effetto *Topaze.* Questo tipo di attività produce all'apparenza situazioni di successo quando si propongono problemi ad hoc, mentre prepara in realtà la strada a fallimenti successivi e a clamorose difficoltà. In questo caso non si può certamente parlare di costruzione di competenza. Nessuno ha imparato nulla, ma l'illusione è totale (Sbaragli, 2011, p. 150).

1.3. **Le diverse componenti dell'apprendimento matematico**

L'apprendimento della matematica comprende almeno cinque tipologie di apprendimenti distinti: apprendimento concettuale (noetica); apprendimento algoritmico (calcolare, operare,…); apprendimento di strategie (risolvere, congetturare,…); apprendimento comunicativo (argomentare, validare, dimostrare,…); apprendimento e gestione delle rappresentazioni semiotiche: di trattamento e di conversione.Fandiño Pinilla (2008, pp. 12-13) scrive:

«L'apprendimento matematico si presenta come un fattore multiplo, ricco di mille aspetti. In matematica, infatti, non basta aver costruito un concetto, ma occorre saperlo usare per effettuare calcoli e dare risposta ad esercizi, combinarlo con altri e con strategie opportune per risolvere problemi, occorre saper spiegare a sé stessi e ad altri il concetto costruito e la strategia seguita, ma anche far uso sapiente delle trasformazioni semiotiche che permettono di passare da una rappresentazione all'altra»

L'apprendimento strategico dà valore a procedimenti e a strategie che si utilizzano quando si risolvono problemi. Bisogna essere convinti e arrivare a convincere tutti gli studenti che quel che conta sono i processi e non i prodotti (Fandiño Pinilla, 2008, p. 61).

L'apprendimento comunicativo, spesso dimenticato, attiene alla capacità di esprimere idee matematiche: giustificando, argomentando, dimostrando e rappresentando gli oggetti matematici in modo visivo: con figure, per iscritto e oralmente, in modo efficace. Esistono studenti che, pur avendo costruito cognitivamente oggetti della matematica, non mostrano la prontezza e la capacità di comunicare quello che hanno costruito in forma significativa. La comunicazione degli oggetti matematici, costruiti cognitivamente, avviene per mezzo di registri semiotici e richiama la terza delle componenti dell'apprendimento matematico prese in considerazione: l'apprendimento e la gestione delle rappresentazioni semiotiche (ibid.).

Tale componente dell'apprendimento matematico consiste in:

-saper scegliere i tratti distintivi che si vogliono rappresentare di un oggetto matematico, cognitivamente costruito o in via di costruzione;

-saper scegliere il registro o i registri semiotici che si reputano adatti a tale rappresentazione;

-saper trasformare una rappresentazione, dopo averla effettuata, in un'altra dello stesso registro (trattamento) o da un registro all'altro (conversione), in modo opportuno, senza perdere di vista il significato dell'oggetto di partenza (Bolondi e Fandiño Pinilla, 2013, p. 25).

Un insegnante, che voglia comprendere se e quanto spazio dà ai diversi tipi di apprendimento, può fare una disamina delle proprie scelte didattiche in relazione alle diverse situazioni d'aula, per valutare se, e quanto, una o più componenti dell'apprendimento matematico siano poco attivate. Tale presa di coscienza può ispirare la messa a punto di azioni appropriate che garantiscano una equilibrata valorizzazione di tutte le componenti dell'apprendimento matematico.

1.4. Il problem solving

Le ore di matematica in aula sono ricche di attività attinenti l'apprendimento di regole, tecniche, simboli e formule che gli alunni devono apprendere e successivamente applicare, nei cosiddetti "problemi esercizio". Una volta che ha acquisito alcune regole, l'uomo, nel nostro caso l'allievo, può usarle per molti scopi nei suoi rapporti con l'ambiente. Può fare anche qualcosa di più importante: può pensare. Ciò significa che egli è in grado di combinare le regole che ha appreso in una grande varietà di regole di ordine superiore. Per fare ciò stimola sé stesso e risponde a vari tipi di stimolazione da parte dell'ambiente. Grazie al processo di combinazione di regole vecchie in regole nuove, egli risolve problemi che sono nuovi per lui, acquistando così un patrimonio di nuove capacità (D'Amore, 2014, p. 12). Gagné (1973, pp. 257-258, cit. da D'Amore, 2014, p. 13) scrive:

«Certamente una delle maggiori ragioni per apprendere regole è il loro uso nella risoluzione dei problemi. L'attività di problem solving è così un'estensione naturale dell'apprendimento di regole, di cui la parte più importante del processo si svolge all'interno del soggetto. La risoluzione può essere guidata da una maggiore o minore quantità di comunicazione verbale, proveniente dall'esterno, ma le variabili più essenziali sono interne. […]. Il problem solving può essere concepito come un processo di scoperta da parte del soggetto di una combinazione di regole già note che egli può applicare per raggiungere una risoluzione per una situazione nuova e problematica […]. Durante questo processo di pensiero, egli proverà un certo numero di ipotesi, verificando la loro applicabilità. Quando trova una combinazione particolare di regole che si adatta alla situazione, egli non solo ha risolto il problema, ma ha anche appreso qualcosa di nuovo».

Fra i fattori che influiscono sui processi risolutivi di un soggetto mentre risolve un problema è ampiamente riconosciuta l'importanza delle conoscenze che egli possiede in relazione a tale ambito (Zan, 2010², p. 147). Non è facile definire cosa si intenda per "conoscenza matematica", ma possiamo osservare che tale conoscenza è articolata e comprende fatti, definizioni, procedure, competenze rilevanti, conoscenze delle regole del discorso (Schoenfeld, 1992, cit. da Zan, 2010², p. 148).

Con il superamento dell'approccio comportamentista, all'inizio del 1 900, la psicologia comincia a interessarsi allo studio dei processi produttivi e l'attività di risoluzione dei problemi (problem solving) entra per l'appunto in tale categoria di processi (Baccaglini et alii, 2018, p. 105) viene dato dagli studi della corrente psicologica della Gestalt, che richiama e aggiorna la nozione degli Elementi di Euclide: «il tutto è più della somma delle singole parti» (ibid.).

La Gestalt attribuisce l'organizzazione delle percezioni a leggi innate (le leggi dell'organizzazione percettiva); l'aspetto caratterizzante è l'assunto che la mente non sia un ricettore passivo di informazioni, ma che le organizzi in modo da formare un «tutto percepito» (ibid.). Particolarmente interessanti sono gli studi della Gestalt sulla percezione visiva, condotti da Kanizsa negli anni '50 del secolo scorso. Proprio Kanizsa sottolinea l'interesse della psicologia della Gestalt per tutto ciò che è pensiero produttivo:

> «Le ricerche degli psicologi della Gestalt sono rivolte a stabilire la fenomenologia di questi processi produttivi e le caratteristiche che li distinguono da quelli meramente riproduttivi, a individuare le condizioni che li favoriscono e quelle che li ostacolano, a localizzare i momenti decisivi del processo, quando si sprigiona il lampo della comprensione» (Kanizsa, 1973, p. 36, cit. da Baccaglini et alii, 2018, p. 106).

Centrale è il ruolo della "ristrutturazione" nella risoluzione di un problema. Kölher (1917), uno dei padri fondatori della Gestalt, evidenzia il ruolo della fase di ristrutturazione (consapevole e funzionale) nella risoluzione di un problema. Egli conduce studi sull'intelligenza degli animali superiori, in particolare sugli scimpanzé, che vengono messi di fronte a situazioni problematiche di diverse difficoltà: uno scimpanzé, messo all'interno di una gabbia con la porta sul retro aperta, vede una banana attraverso le sbarre di una gabbia; in una seconda situazione, più complessa, lo scimpanzé è introdotto in una gabbia nella quale viene chiusa anche la porta sul retro, ma in essa è presenta un bastone.

Tali esperimenti portano a definire alcuni aspetti del problem solving: l'"illuminazione", che porta a distogliere l'attenzione dall'obiettivo primario: la banana, e la "fissità funzionale". Di fondamentale importanza è anche la distinzione tra "ansia produttiva", che mantiene la motivazione a raggiungere l'obiettivo e l'"ansia vincolante", che è quella degli scimpanzé che non riescono a distogliere l'attenzione dall'obiettivo e continuano a scuotere le sbarre fino allo sfinimento (Baccaglini Frank et alii, pp. 107-108).

Gli studi di Kölher portano ad identificare e a descrivere cinque fasi tipiche nel processo di risoluzione dei problemi:

1. la preparazione: la ricerca di ricondurre il problema a esercizio, cercando tra situazioni e soluzioni già affrontate e attuando comportamenti tipici;
2. la messa da parte: il problema non risolto viene momentaneamente abbandonato;
3. l'incubazione: il ragionamento inconsapevole;

4. l'insight o illuminazione: il problema è ristrutturato, ed è stata superata una qualche fissità funzionale;

5. la verifica: la messa in pratica della strategia suggerita dall'illuminazione e il controllo del fatto che tale strategia permetta di risolvere il problema (ibid.).

Pensando al punto 2 (la messa da parte) in aula spesso osserviamo che gli alunni con bassa autostima "mettono da parte" il problema; spesso tale accantonamento non è momentaneo ma definitivo, in quanto è legato alla convinzione che sia impossibile raggiungere la soluzione.

Tale considerazione è legata alla variabile "tempo" e alla visione distorta che se ne ha a scuola, dove si è soliti dare poco tempo per la risoluzione di quelli che vengono chiamati "problemi", ma che spesso, come si è già considerato, sono quelle richieste che intendono promuovere più l'aspetto riproduttivo che quello produttivo del conoscere; da qui la convinzione: «un problema o lo risolvi subito oppure è inutile che perdi tempo a pensarci», quasi un invito all'abbandono definitivo *(*Baccaglini Frank et alii, 2018, p. 108*)*.

I primi studi sistematici sui metodi risolutivi nel contesto matematico sono effettuati da George Polya, che si pone come scopo un obiettivo didattico: insegnare a risolvere problemi. Egli assume come modello di "bravo risolutore" il matematico impegnato nell'attività di ricerca; analizza quindi i processi messi in atto da questi bravi risolutori tentando di evidenziare quali sono i metodi risolutivi che essi impiegano, nella convinzione di poterli insegnare. Polya chiama lo studio di tali processi risolutivi "euristica" *(*dal greco heuriskein, che significa trovare). Scopo dell'euristica è lo studio dell'invenzione e della scoperta (Polya, 1945, p. 119 - trad. italiana). L'euristica moderna consente la comprensione del processo di risoluzione dei problemi, soprattutto per quanto riguarda "le operazioni mentali tipiche di esso" (Polya, 1945, p. 135 - trad. it.).

Tali operazioni sono stimolate da alcune domande chiave che il bravo solutore di problemi si pone in maniera naturale e spontanea. Polya distingue 4 fasi, che sono a sua parere tipiche di ogni processo risolutivo:

fase 1: si deve comprendere il problema;

fase 2: si devono scoprire i legami che intercedono tra le varie informazioni, fra ciò che si cerca e i dati, per compilare un piano di risoluzione;

fase 3: si procede allo sviluppo del piano:

fase 4: si esamina il risultato e si procede alla sua verifica.

Già Claparède (1933) aveva osservato che il processo risolutivo di un problema prevede tre fasi: la presa di coscienza del problema, la scoperta di una soluzione, la sua verifica (Zan, 2010[2], p. 153).

Il bravo risolutore, secondo Polya, si pone in modo naturale alcune domande che stimolano le operazioni mentali utili per la risoluzione e suggeriscono euristiche; tali domande costituiscono lo schema di risoluzione. Sembra che le parole di Polya vogliano precorrere l'annunzio di alcune implicazioni didattiche di stampo costruttivista dell'apprendimento. La sua idea è che l'insegnante, esplicitando queste domande in modo opportuno, possa localmente aiutare lo studente a risolvere uno specifico problema, e più in generale educarlo a porsi tali domande, attivando le euristiche appropriate di fronte a un problema in maniera autonoma; in questo modo l'insegnante potrebbe insegnare ad affrontare problemi (Baccaglini Frank et alii, 2018, p. 115).

Gli studi di Polya hanno avuto un seguito negli Stati Uniti, dove sono stati messi a punto programmi finalizzati all'insegnamento di molteplici euristiche, come: disegnare una figura; ragionare per assurdo; analizzare i casi limite; modificare un problema passando a considerare un problema più semplice (ibid.).

Polya, nel suo libro: How to solve it (1945), scrive:

«Un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Ovviamente, se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l'opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionate alle conoscenze della scolaresca e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale» (Polya, 1945, tr. it. p. 7).

È accaduto, però, che i programmi fondati sull'insegnamento di un repertorio di euristiche specifiche si siano rivelati fallimentari: «Gli studenti addestrati in questo modo non riuscivano a generalizzare e a trasferire le conoscenze apprese in altre situazioni» (Zan, 2010[2], p. 156).

Tali fallimenti aprono il campo, agli inizi degli anni '80 del secolo scorso, a nuovi studi in didattica della matematica che, pur nel riconoscimento del grande contributo dato dagli studi di Polya, ne sviluppano un'analisi critica e mettono in discussione l'idea che possa esistere un metodo addestrativo per insegnare a risolvere i problemi. In particolare sono messi in discussione i due assunti fondamentali da cui era partito Polya: il fatto che per essere un buon solutore di problemi sia sufficiente possedere un buon bagaglio di conoscenze ed euristiche, e l'efficacia dell'insegnamento delle euristiche (Baccaglini Frank et alii, 2018, p. 116).

Schoenfeld (1985, cit. in ibid.) sottolinea come Polya abbia descritto accuratamente il processo di risoluzione di un problema, ma aggiunge che ciò non è trasferibile a livello didattico, in quanto non fornisce elementi per l'uso efficiente delle strategie. Schoenfeld, nelle sue ricerche, osserva e ascolta diversi studenti alle prese con il problem solving, chiedendo loro di ragionare a voce alta e registra i tempi che essi dedicano alle diverse fasi di risoluzione.

I dati raccolti evidenziano che i "cattivi solutori" dedicano quasi tutto il tempo allo sviluppo di un piano (esplorazione). I "bravi solutori" dedicano molto tempo a riflettere sugli stati di avanzamento dei loro tentativi e saltano da una fase all'altra della risoluzione di un problema sulla base di queste riflessioni. Dunque ciò che caratterizza i buoni risolutori è la quantità e la qualità delle decisioni prese nel corso del processo risolutivo; in questo senso, un ruolo chiave è da attribuire alle competenze di natura metacognitiva, ossia alle capacità di valutare e prendere consapevolezza delle proprie risorse, di prendere decisioni efficienti, in base a tale consapevolezza. I bravi risolutori spendono la maggior parte del tempo a pensare piuttosto che a fare, ponendosi vari tipi di domande, ad esempio: «Che cosa sto facendo?». Il bravo risolutore considera più approcci, dei quali molti sbagliati, ma non li porta mai fino in fondo perché: «[…] è tanto inesorabile nel controllare e rifiutare idee, quanto ingegnoso nel generarle»(Schoenfeld, 1987, p. 194). Schoenfeld (2015, p. 2) introduce un suo articolo scrivendo:

«*Give a man a fish, and you feed him for a day; show him how to catch fish, and you feed him for a lifetime.We have been feeding children mathematical fish for hundreds if not thousands of years. It is time to teach them how to fish*.».[1]

Schoenfeld usa l'espressione "decisioni strategiche", differenziandola dall'espressione "decisioni tattiche". Queste ultime comprendono tutti

[1] Questa citazione è stata attribuita alla Bibbia; al filosofo Maimonide; ed è stato definito un "antico proverbio cinese". Apparentemente la prima fonte tracciabile è una storia intitolata "Mrs. Drymond", di Anne Isabelle Ritchie, figlia di William Makepeace Thackeray.

gli algoritmi e la maggior parte delle euristiche, nel senso presentato da Polya: analizzare e comprendere un problema, fare un disegno, pianificare una soluzione, esplorare, verificare una soluzione. Un esempio di decisione tattica può essere, dato il problema di calcolare l'area di una figura piana, quella di effettuare il calcolo con la trigonometria oppure con la geometria analitica.

Le decisioni strategiche, invece, riguardano la gestione delle risorse durante il processo risolutivo ed influenzano quindi la direzione che prenderà una soluzione: decisioni relative alla gestione del tempo; chiusura di un tentativo di soluzione ed apertura di un altro, passaggio alla fase di esplorazione a conclusione della fase di comprensione (Zan, 2010[2], p. 160).

Schoenfeld propone di dividere il comportamento risolutivo in vari "episodi": 1. lettura; 2. analisi; 3. esplorazione; 4. pianificazione; 5. implementazione; 6. verifica; 7. transizione. In questi episodi si possono riconoscere le quattro fasi di Polya.

Volendo ragionare sulle differenze, possiamo notare la sottile distinzione tra analisi ed esplorazione (che in Polya sono comprese nella fase di comprensione) e nell'introduzione dell'episodio di transizione. I punti di decisioni strategiche si riconoscono nei passaggi fra un episodio e l'altro o nei punti in cui la direzione o la natura della soluzione cambia in modo significativo (Zan, 2010[2], p. 161).

Le ricerche di Schoenfeld sono esemplificative di come la ricerca, già tre decenni fa, avesse sottolineato la complessità del processo di risoluzione dei problemi, identificando il ruolo di fattori diversi, oltre alle conoscenze e alle euristiche (Baccaglini Frank et alii, 2018, p. 117).

Brousseau e D'Amore (2008, p. 10), nell'analizzare la proposta che Polya aveva fatto di tentare passi euristici (cercare delle similitudini, un esempio, un controesempio, generalizzare, comparare, paragonare…), considerarono tale lavoro uno "scivolamento metadidattico", che per l'insegnante vuol dire spostare l'oggetto del suo insegnamento da un'attività o da una nozione su uno dei suoi mezzi di controllo.

«[…] La risoluzione di problemi si vede in parte sostituita da uno studio di procedure di tali risoluzioni […]. L'allievo cerca di applicare le sue euristiche così come cercava di applicare i suoi teoremi ed il successo non è affatto più assicurato, a meno di scegliere problemi ad hoc. Bisogna allora cercare delle euristiche di secondo ordine? […]. Anche se il processo non è ricorsivo, l'inganno è fatale. La sola differenza è che i teoremi sono dei saperi matematici che contengono le loro stesse condizioni di validità, il che non è il caso delle euristiche che sono solo delle conoscenze. Il trattarle come dei saperi è un errore epistemologico e didattico».

La gran parte degli studi sui processi di controllo provengono dal campo dell'Intelligenza Artificiale o dell'Information Processing.I modelli di elaborazione delle informazioni e di intelligenza artificiale più sofisticati prendono in considerazione gli stessi aspetti che sono cruciali nel problem solving umano: mentre un soggetto tenta di risolvere un problema c'è una continua pianificazione "in azione", che prevede l'individuazione e la correzione di errori, ossia continui processi di controllo che coinvolgono monitoraggio, valutazioni e correzioni (revisioni/ritocchi) (Brown et al., 1983 cit. da Zan, 2010[2], p. 163).

La metacognizione è vista come un controllo dei processi; di fronte a un problema è decisivo saper valutare i propri limiti rispetto alle risorse che si prevede il problema metta in gioco e attivare opportune strategie preventive per evitare e superare difficoltà (Baccaglini Frank et alii, 2018, p.116).

Ancora, dunque, vediamo un'evoluzione del concetto di "bravo risolutore": non è tale chi ha adeguate conoscenze nel dominio di conoscenze specifico cui il programma fa riferimento, oppure chi possiede un adeguato repertorio di euristiche, ma è bravo risolutore chi sa organizzare e gestire al meglio tali risorse (le euristiche) in vista dell'obiettivo dato, mettendo in atto continui processi di controllo e autoregolazione (Zan, 2010[2], p. 163).

1.4.1. Le ricerche sui problemi

Nell'effettuare una rassegna su alcune linee di ricerca sul "problema dei problemi", Boero e Ferrari (1988, pp. 660-661) prendono in considerazione due schematizzazioni: la prima è il modello delle situazioni di insegnamento (Chevallard, 1985), che è illustrato in figura 2. (Boero & Ferrari, 2008, p. 663).

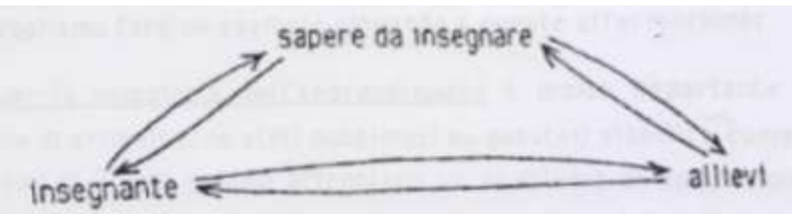


Figura 1: Il triangolo didattico di Chevallard (Boero & Ferrari,2008)

Tale modello tripolare, con tutte le sue frecce di collegamento tra sapere da insegnare, allievi e insegnante, è utile per classificare vari tipi di ricerche sul problem solving:

-ricerche sui problemi matematici come occasione di costruzione e/o di applicazione del sapere matematico (molte ricerche di Polya appartengono a questo ambito).

-Ricerche sul processo di apprendimento degli allievi, visto come processo mentale attivato dalla consegna di risolvere un dato problema.

-Ricerche sulle relazioni tra l'insegnante e gli allievi, e tra gli allievi, durante la risoluzione dei problemi.

-Ricerche sulle relazioni che intervengono nella risoluzione dei problemi fra il sapere degli allievi e il sapere scelto dagli insegnanti.

La focalizzazione su uno dei due poli, o sulle relazioni tra i diversi poli del modello, consente di individuare diversi filoni di ricerca e anche valutarne i diversi impatti nella pratica dell'insegnamento (ibid.).

A giudizio degli Autori, le ricerche più importanti ai fini dell'insegnamento sono quelle che mettono in gioco più poli del modello, proprio perché si avvicinano alla complessità e alla realtà del processo di insegnamento-apprendimento [...].

«Il modello tripolare delle situazioni di insegnamento [...] mette bene in evidenza che l'insegnante non può, nella risoluzione dei problemi, applicare delle procedure professionali esecutive, ma piuttosto deve ragionare sul complesso delle variabili in gioco (sapere da costruire o applicare, processo di apprendimento dell'allievo, ruolo dell'insegnante nel gestire la ricontestualizzazione del sapere... Per esempio il ruolo dell'insegnante può ridursi, per insegnare il calcolo delle frazioni, a una gestione esecutiva di una successione di esercizi ben graduata (con alcune spiegazioni intermedie); nel caso della risoluzione dei problemi l'insegnante deve prestare attenzione alle strategie risolutive spontanee degli allievi, selezionare quelle che meritano di essere socializzate, sottolineare il sapere matematico che viene via via costruito o applicato, ecc. Si tratta di un ruolo di ricerca insostituibile mentre si conduce un lavoro in classe, e poi, fuori della classe, quando si analizzano gli elaborati degli allievi e si progettano le situazioni problematiche successive. Gli insegnanti di scuola primaria sono consapevoli che la loro didattica dei problemi non crea autonomia di risoluzione degli stessi per una percentuale elevata di allievi e sono anche disponibili ad ammettere che ciò possa almeno in parte dipendere anche da una prestazione professionale inadeguata. Le ricerche sul "problem solving" [...] possono fornire agli insegnanti indicazioni di lavoro utilizzabili soprattutto se li convincono della necessità di porsi su questo terreno in quell'atteggiamento di ricerca sopra ipotizzato» (Boero & Ferrari, 1988, pp. 667-668).

Gli Autori propongono anche una seconda schematizzazione, che è il modello del lavoro sul problema (Borasi, 1984; 1986. Boero, 1986) e che presentiamo in figura 2.

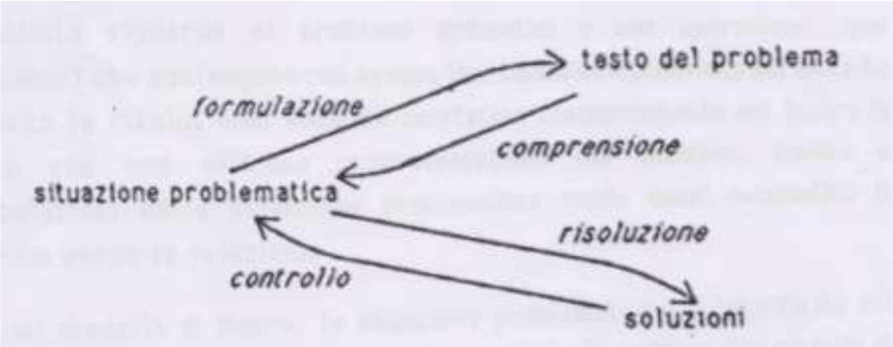


Figura2: *Il modello del lavoro sul problema (Boero & Ferrari, 1988, p. 666).*

Questo modello permette di analizzare fenomeni che si presentano quando i bambini affrontano un problema, come per esempio il "cortocircuitamento" del processo risolutivo con passaggio diretto da "testo" a "soluzioni", combinando i dati secondo schemi stereotipati o a caso ed evitando la penetrazione razionale della situazione problematica.

Tale modello può fornire anche all'insegnante un quadro di riferimento e un linguaggio discretamente precisi per analizzare, con i colleghi, le difficoltà del proprio lavoro e gli ostacoli che incontrano con gli allievi.

Molte ricerche sul "problema dei problemi" hanno avuto come oggetto la struttura del testo dei problemi, i rapporti tra la formulazione del testo e le strategie risolutive prescelte, i problemi di comprensione del testo da parte degli allievi, soprattutto tra la seconda metà degli anni '70 e la prima metà degli anni '80. Nesher (1977, 1980, 1982, 1986), per esempio, ha condotto ricerche importanti, alle quali si è già fatto riferimento nel paragrafo dedicato ai problemi scolastici, sui seguenti aspetti:

-struttura del testo dei problemi;

-confronto tra problemi scolastici e problemi "della vita";

-carattere stereotipato dei testi dei problemi scolastici.

Altre ricerche sono state dedicate all'importanza della presenza di elementi non verbali nel testo dei problemi (tabelle, immagini rappresentative della situazione problematica, formule...) in relazione alle strategie risolutive degli allievi (Dumont, 1982; Moser, 1985).

Un altro filone di ricerca ha studiato il rapporto che sussiste tra la formulazione del testo e la natura della situazione problematica. In queste ricerche il ruolo dell'insegnante è entrato in gioco in modo diretto, per quel che riguardava la scelta delle situazioni problematiche nel contesto della attività della classe, ma anche la scelta del tipo di formulazione del problema.

Pensando ora alle ricerche effettuate negli ultimi anni, diversi studi hanno messo in luce la dipendenza delle prestazioni in matematica da fattori anche extramatematici che precedentemente sono stati trascurati. Sono stati messi in luce i limiti di pratiche didattiche fondate sull'acquisizione individuale di contenuti matematici. La formazione matematica è sempre più concepita come un processo di costruzione collettivo, la matematica è sempre più considerata un "discorso"; di conseguenza le competenze linguistiche degli allievi acquistano un ruolo maggiore e la qualità del pensiero è legata alla qualità della comunicazione, che è a sua volta legata alla qualità del linguaggio adottato (D'Aprile & Ferrari, 2003, pp. 2 - 3). Ciò conduce ad effettuare delle considerazioni sul ruolo degli insegnanti, che approfondiremo nel paragrafo successivo.

1.4.2. Il ruolo dell'insegnante nel problem solving

Il problem solving è unanimamente riconosciuto come un importante contesto naturale per sviluppare e riconoscere le abilità metacognitive, mettere in luce l'importanza del lavoro collaborativo tra gli allievi e modificare il ruolo dell'insegnante, che pone domande piuttosto che fornire risposte e che stimola processi di pensiero significativi, anziché guidare verso la risoluzione corretta.

Garofalo, Kroll e Lester (1987) descrivono un progetto finalizzato allo sviluppo delle capacità cognitive in studenti di 12-13 anni.

L'attività di problem solving avviene collettivamente o individualmente. L'insegnante dirige le discussioni con l'intera classe su un problema da risolvere: osserva, pone domande e guida gli studenti, mentre risolvono problemi; guida la discussione con l'intera classe nei tentativi di soluzione; aiuta gli studenti a costruire un repertorio di euristiche e strategie di controllo.

Tali metodologie si ritrovano nelle tecniche suggerite da Schoenfeld (1987) per lo sviluppo delle capacità metacognitive, anche se egli le utilizza in corsi di problem solving con studenti di scuola superiore "bravi in matematica". Questi corsi prevedono che l'attività in classe sia realizzata collettivamente, con l'insegnante che modera o a piccoli gruppi. L'insegnante comunque non guida gli alunni verso la soluzione corretta, ma li aiuta nel dare massima espressione a ciò che viene da loro generato e li invita a riflettere sui loro processi. Nella discussione in classe sui problemi, la presenza dell'insegnante è quella di un moderatore che "forza" la classe a focalizzare l'attenzione su decisioni di controllo. Nei piccoli gruppi l'insegnante modera e pone domande: «Cosa state facendo? Come lo state facendo? Perché lo state facendo? Come vi posso aiutare?».

Anche ricercatori italiani hanno utilizzato il problem solving per lo sviluppo di abilità metacognitive: il gruppo di Modena, coordinato da Nicolina Malara (Malara, 1993) ha condotto un progetto finalizzato a migliorare l'abilità di risoluzione dei problemi, con un'enfasi esplicita sulle abilità metacognitive coinvolte. Gli alunni si trovavano di fronte a problemi di tipo logico, volutamente distanti da situazioni problematiche aperte, in campi di esperienza tipici del mondo reale. In questo contesto l'insegnante stesso veniva sfidato dagli allievi e aveva quindi la possibilità di mostrare in diretta come egli si poneva di fronte a un problema nuovo e quali percorsi seguiva, a volte anche in modo infruttuoso, per giungere alla soluzione (Malara, 1993, p. 932).

Il problem solving può essere realizzato secondo modalità diverse: individualmente, in piccoli gruppi, collettivamente dall'intera classe. Un'ulteriore possibilità è data dal problem solving a coppie, che viene utilizzato spesso per mettere in luce i processi metacognitivi di un soggetto durante la risoluzione di un problema (Schoenfeld, 1983 a). La situazione a due infatti forza ognuno dei componenti a portare alla luce le proprie riflessioni.

Lester e Charles (1992, pp. 3 - 7) hanno classificato i fattori coinvolti nelle attività di problem solving sulla base di quattro ampie categorie: *category 1: Extra-classroom Considerations; category 2: Teacher Planning; category 3: Classroom Processes; category 4: Instructional Outcomes.*

Approfondiamo di seguito la categoria che ci interessa particolarmente, in relazione a questo specifico paragrafo che riguarda gli insegnanti: la *Teacher planning,* la pianificazione degli insegnanti.

Per pianificazione degli insegnanti gli Autori intendono: le diverse decisioni prese prima, durante e dopo le attività di problem solving; le tecniche istruttive, i metodi di insegnamento, le procedure di gestione della classe, la valutazione delle prestazioni degli studenti e il tempo da dedicare alle attività e ad argomenti in particolare.

Il fare matematica in classe, quando si propone un'attività significativa di problem solving, comporta una valorizzazione del ruolo dell'insegnante, rispetto ad altri approcci che prevedono un uso massiccio di esercizi standard. Tale valorizzazione è legata alla maggiore responsabilità che viene ad avere l'insegnante nel processo di apprendimento dei suoi allievi (Di Martino, 2001, p. 94).

Il ruolo dell'insegnante non è legato solo alla scelta dei problemi, che comporta comunque più responsabilità e perizia rispetto alla semplice assegnazione degli esercizi di routine; si devono intercettare le reazioni emozionali negative degli allievi e cercare, da esperti, di insegnare a dominare le conseguenze di queste emozioni, facendo prevalere le conoscenze sullo sconforto e sulla paura del "buio", nella consapevolezza di possedere determinate risorse.

I problemi si possono risolvere in più modi ed ogni soluzione ha la sua dignità. La paura del problema è soprattutto una paura di non saper risolvere il problema, che può essere superata grazie a una valorizzazione dei processi nelle attività di problem solving, senza lasciarsi condizionare dall'ansia del prodotto.

Dal punto di vista matematico tale scelta sarebbe una scelta epistemologicamente corretta. Il teorema di Fermat ne è un esempio: per arrivare alla soluzione di alcuni difficili problemi c'è stato bisogno del contributo di matematici di luoghi ed epoche diverse (ibid.).

Un altro aspetto fondamentale per la didattica del problem solving, così come di tutti gli altri argomenti della Matematica, è il ruolo decisivo che gli insegnanti hanno sul piano della comunicazione. Facendo riferimento alla prospettiva della matematica come discorso, brevemente illustrata alla fine nel paragrafo precedente, agli insegnanti spetta il ruolo di promuovere, indirizzare e coordinare le interazioni tra gli alunni, per favorire in loro lo sviluppo del pensiero. Di fondamentale importanza è sollecitare la comunicazione nella classe, utilizzando e promuovendo usi linguistici ampiamente accessibili e tali da non creare ostacoli inutili (D'Aprile & Ferrari, 2003, pp. 4-5).

Bisogna rendere il linguaggio utile alle funzioni che deve svolgere. Spesso sono preziose le caratteristiche del linguaggio parlato, con la possibilità successiva di precisare e correggere successivamente i testi, anche attraverso processi di verifica e di negoziazione collettiva (ibid.).

1.4.3. Convinzioni, atteggiamenti, emozioni e problem solving

Le potenzialità del problem solving investono anche convinzioni, emozioni e atteggiamenti.

Il problem solving è il contesto naturale per portare alla luce eventuali convinzioni bloccanti che un allievo ha costruito sulla matematica e su di sé. Il fatto che esse emergono durante l'attività matematica le rende più significative di quelle che possono essere dichiarate in risposta a un questionario. Il problem solving è prezioso anche per prevenire e superare una visione distorta della matematica o uno scarso senso di autoefficacia. Essere coinvolti in una attività matematica significativa favorisce da un lato l'assunzione della responsabilità dell'apprendimento e l'investimento di risorse, dall'altro una visione della matematica come disciplina di processi più che di prodotti, dinamica e viva.Il tema delle convinzioni sarà ripreso ed approfondito dal punto di vista teorico nel secondo capitolo di questo lavoro.

Le potenzialità del problem solving riguardano anche le emozioni. Un problema, soprattutto di ricerca, può dare emozioni alternanti: curiosità, eccitazione, gioia, orgoglio si alternano a noia, frustrazione, rabbia. Quel che sembra importante è la capacità di gestire le emozioni negative (MCLeod, Metzger & Craviotto, 1989).

Le emozioni in matematica, e in particolare nelle attività di problem solving, giocano un ruolo molto importante. Evitare le emozioni negative è un obiettivo sbagliato per due motivi:

1. la nascita di emozioni positive è conseguente al superamento di emozioni negative. Una matematica senza emozioni procura meno disagi, ma non affascina nessuno (Di Martino, 2001, p. 93);
2. nella vita scolastica, e non solo, ci troviamo per forza di cose a dover vivere discrepanze "negative" rispetto alle nostre aspettative. Le reazioni emotive a tali situazioni saranno tanto più forti quanto più costituiranno un'esperienza nuova per chi le vive.

L'attività di problem solving è dunque il naturale ambiente in cui emozioni negative si possono trasformare in emozioni positive e la matematica può far scoprire tutto il suo fascino (ibid.). É una palestra di educazione emozionale, in cui l'allievo può imparare a gestire le emozioni negative e a sostenere l'azione intrapresa, nonostante i momenti di difficoltà e di blocco; è un contesto naturale che da un lato educa alla gestione di alcune tipiche emozioni negative associate alla matematica, quali ansia, rabbia frustrazione, dall'altro fa emergere emozioni positive quali curiosità e soddisfazione. Quindi il problem solving appare come il mezzo ideale per sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica, per riconoscere, prevenire e superare atteggiamenti negativi come il fatalismo, caratterizzato da una visione distorta della disciplina o da uno scarso senso di autoefficacia (Zan, 2010², p. 264).

1.4.4. Discussione, argomentazione e problem solving

Il richiamo teorico all'opera e all'impostazione di Vygotskij è un elemento costante delle ricerche che attribuiscono un ruolo determinante all'influenza dell'interazione sociale e culturale sullo sviluppo (Pontecorvo et alii, 2004, p. 23). Nella prospettiva vygotskiana si assiste a un capovolgimento del modo usuale di intendere i rapporti tra sviluppo e trasmissione della conoscenza o, se si vuole, tra sviluppo e *obučenie* (ibid. p. 30).

Con il secondo termine si intende tutto ciò che è portato dalla cultura e dall'istruzione sistematica e che è in gran parte già presente nel linguaggio e nelle pratiche discorsive che accompagnano la socializzazione, oltre che attraverso gli oggetti e gli strumenti di una cultura, e ancor di più attraverso tutti i suoi amplificatori o artefatti cognitivi.

«La psicologia individuale è un aggregato di relazioni sociali interiorizzate, il che vuol dire che la dimensione sociale è primaria nel tempo sia filogeneticamente che ontogeneticamente» (Vygotskij, 1960, cit. da Pontecorvo et alii, 2004, p. 31).

Ogni funzione psichica superiore appare due volte nello sviluppo culturale del bambino: prima sul piano sociale, poi su quello psicologico, come una categoria di funzionamento interpsicologico che poi diventa intrapsicologico. Ciò che è diventato mentale e interno, dunque, è preceduto da una fase esterna sociale; le relazioni sociali tra le persone sono geneticamente prioritarie per tutte le funzioni superiori (Pontecorvo et alii, 2004, p. 31).

La priorità dei processi sociali su quelli individuali, intesa come l'emergere delle funzioni psicologiche del bambino nelle interazioni con gli adulti e con i coetanei più competenti, si manifesta nella "zona di sviluppo prossimale", di cui si è già parlato a pagina 18 di questo lavoro. Si è distinto ciò che il soggetto può fare da solo nel suo funzionamento indipendente (il suo livello "attuale" di sviluppo) e ciò che invece può fare quando riceve qualche aiuto (il suo livello di sviluppo "prossimale").

Ciò è davvero molto importante per l'istruzione: il bambino può operare oltre il suo livello attuale, quando interagisce con adulti, ma anche con altri compagni; si crea così una nuova zona, dove si può intervenire con l'istruzione e in essa si può stabilire quel legame tra i partecipanti all'interazione in modo tale che si incontrino sul piano del funzionamento interpsicologico.

L'interazione sociale però si definisce in funzione del contesto più generale in cui è inserita, in riferimento alla sua realtà sociale e alle sue caratteristiche, in termini di attese su scopi, ruoli, mezzi, procedure e operazioni. In questo senso appare molto utile la nozione di attività e della correlata teoria dell'attività (Leont'ev, 1975/1977, pp. 67-8, cit. da Pontecorvo et alii, 2004, p. 34):

«[…] Un'unità molare, non additiva, della vita del soggetto corporeo materiale […]; è l'unità della vita mediata dalla riflessione mentale, la cui funzione reale consiste nell'orientare il soggetto nel mondo oggettivo. In altri termini, l'attività non è una reazione, né un insieme di reazioni, ma un sistema che ha una sua struttura, i suoi passaggi, le sue trasformazioni interne e un suo sviluppo».

Le teorie citate trovano un terreno di applicazione nelle interazioni sociali che si attuano nel contesto scolastico. Di fatto, la potenza dei contesti di conflitto di opinioni, per lo spiegare e l'argomentare, non è la più utilizzata a scuola ai fini dell'apprendimento: in particolare, mentre nelle interazioni spontanee tra pari che si verificano a scuola i bambini discutono sui fatti e le opinioni (Genishi & Di Paolo, 1982, cit. da Pontecorvo et alii, 2004, p. 75), negli scambi verbali guidati dall'adulto non si prevedono momenti di reale discussione e quindi anche di possibile conflitto in cui sia in questione il problema conoscitivo.

La caratteristica delle interazioni verbali a scuola dovrebbe essere costituita dal riferirsi a un oggetto di conoscenza e dal porsi come scopo il costruire modalità di discorso e di analisi sempre più adeguate alle specificità degli oggetti del conoscere. Invece la struttura usale delle conversazioni in classe, con la sua tipica sequenza: domanda dell'insegnante, risposta dell'allievo, commento dell'insegnante, risponde allo scopo di valutare l'allievo verificando le conoscenze che egli possiede. Questo tipo di interazione verbale non è fatta per costruire né opposizione di punti di vista, né nuove conoscenze.

Quando si parla, dunque, di discussione in classe, bisogna ben precisare le condizioni che rendono cognitivamente produttivo questo particolare tipo di interazione verbale anche nel contesto scolastico.

Diverse ricerche hanno mostrato che la discussione non si realizza "naturalmente" a scuola, ma è importante inserire un insieme di condizioni:

- un'esperienza comune che porti ad una lettura unica o soluzione;
- un discorso che rielabora l'esperienza compiuta e che si struttura come situazione di problem solving collettivo, in cui sia possibile negoziare significati, condividere e confrontare differenti soluzioni o interpretazioni di uno stesso materiale;
- un cambiamento delle usuali regole di partecipazione al discorso scolastico. I turni di discorso non sono controllati dall'insegnante, ma sono in parte sostituite da riprese o rispecchiamenti degli interventi degli allievi, da richieste di spiegazione e da interventi che sottolineano un'eventuale discordanza di posizioni (Pontecorvo et alii, 2004, p. 76).

La discussione è una situazione in cui si elabora e si costruisce la soluzione di un problema attraverso il ragionare insieme, mediante un pensiero-discorso che ciascuno degli interventi manifesta e insieme raccoglie dagli altri. Spesso ciò è più facile per i bambini che per gli adulti, in quanto i bambini "dicono tutto quello che pensano" o meglio "pensano quando dicono". Il filo del ragionamento passa da un bambino ad un altro; ci possono essere idee buone che vengono poi abbandonate anche da chi le aveva proposte, proprio per effetto di una logica di gruppo che si crea nel pensare insieme (Pontecorvo et alii, 2004, p. 218).

Il risultato di una discussione non deve essere necessariamente la soluzione di un problema, ma può essere anche quello di delimitare o definire il problema, escludendo tutto ciò che è secondario e non riveste importanza prioritaria, oppure quella di avvicinarsi alla soluzione attraverso una serie di fasi intermedie oppure ancora quello di pervenire ad un primo livello di spiegazione dei fenomeni (ibid.).

La discussione richiede e consente l'esplicitazione di atteggiamenti scientifici più approfonditi poiché l'interazione che ha luogo tra i bambini e il contrapporsi delle loro opinioni, spinge il ragionamento collettivo oltre la semplice osservazione/descrizione dei fenomeni e conduce verso la ricerca di spiegazioni.

«Le discussioni sono anche uno degli strumenti di indagine e sollecitazione più adeguati per comprendere i processi di costruzione delle conoscenze messi in atto dai bambini in relazione alle stimolazioni culturali offerte dagli specifici contenuti disciplinari proposti a scuola»(Pontecorvo et alii, 2004, pp. 217).

La dimensione che più caratterizza la discussione è data dal ruolo dell'opposizione nello spingere avanti il discorso e nel provocare sviluppi e approfondimenti. Emerge così un nesso significativo tra pensare, discutere e argomentare: il pensiero procede attraverso asserzioni che si distinguono da altre, che contengono una presa di posizione, un esprimersi pro e contro, attraverso categorizzazioni e giudizi di valutazione, con analogie, similitudini, esempi, ricerca di ragioni, giustificazioni, utilizzando il richiamo a regole e leggi generali (Pontecorvo et alii, 2004, p. 83). Con riferimento al nostro dominio specifico, che è quello matematico, si riporta la definizione di discussione di Bartolini Bussi & Boni (1995, p. 227):

> «Una discussione matematica può essere descritta metaforicamente come una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, procedura, teoria, ecc.) che costruisce uno dei motivi dell'attività di insegnamento-apprendimento».

Tale metafora è orientata a sottolineare aspetti diversi da quella indicati nella definizione di Pirie & Schwarzenberger (1988, cit. in Bartolini Bussi, Boni, 1995, p. 227): per tali autori una discussione matematica è una conversazione finalizzata su un argomento di matematica, nella quale sono presenti contributi originali degli allievi e interazione. La metafora introdotta da Bartolini e Boni (1995) è diversa per i seguenti aspetti: il processo di lungo termine (attività) nel quale si colloca una particolare discussione; la presenza di "voci", che rappresentano prospettive diverse su uno stesso problema. Inoltre la discussione matematica è orchestrata dall'insegnante, che esprime in molti casi la voce del sapere matematico (così come esso si è costituito socialmente come sapere da insegnare). È però garantita anche la presenza e l'articolazione per un tempo sufficiente di altre voci (espresse fisicamente dagli allievi) che portano in scena prospettive di altre categorie sociali e culturali (ad esempio quella della pratica extrascolastica).

Il ruolo dell'insegnante è quello di favorire l'esplicitazione di un collegamento tra sensi personali e significato (ibid. p. 228). Appare di rilevante importanza, nel progettare attività matematiche nella scuola primaria, riflettere su che cosa si ritenga essenziale curare nell'insegnamento della matematica ai vari livelli scolari, al fine di favorire un effettivo e significativo apprendimento, valutando se, nello specifico, problem solving e argomentazione rientrano tra gli aspetti che consideriamo irrinunciabili, confrontandosi poi con i riferimenti normativi

(Di Martino, 2016, p. 25). In questo senso sia il piano epistemologico che quello normativo sembrano confermare la tesi che sia il problem solving che l'argomentazione debbano avere un ruolo di primo piano nella didattica d'aula. Dal punto di vista epistemologico, molti matematici sottolineano come la parte più significativa della matematica sia quella che attiene alla risoluzione di problemi e il miglior modo di risolvere problemi sia affrontare problemi (Halmos, 1975).

«La consapevolezza dell'importanza cruciale dello sviluppo delle competenze argomentative nell'educazione matematica è acquisizione più recente, maturata a partire dalla metà degli anni '70 come effetto della rivalutazione, suggerita dall'importanza crescente assunta dalle opere di Vygotskij, del ruolo del linguaggio verbale nella costruzione del pensiero e nello sviluppo intellettuale, e dagli studi sul forte condizionamento dello sviluppo delle competenze linguistiche più elevate (quelle argomentative in particolare) da parte del contesto. A partire da Bernstein e R Hasan, i risultati degli studi condotti pongono il problema di come la scuola (in quanto parte del contesto) possa contribuire a tale sviluppo […]. Le funzioni dell'argomentazione ai fini dello sviluppo del pensiero matematico hanno trovato un'eco importante nei programmi scolastici e nelle Indicazioni curriculari di diversi Paesi (come gli Stati Uniti, in cui gli influenti Standard del National Council of Teachers of Mathematics, NCTM del 2000 indicavano tra gli obiettivi da perseguire lo sviluppo delle competenze di giustificazione, e verifica argomentativa fin dalla scuola dell'infanzia. Varie ricerche hanno messo in luce che l'argomentazione fa parte delle potenzialità cognitive che possono essere sviluppate fin dalla scuola primaria (Maher e alii, 2006; Bartolini et alii, 1999), distinguendo l'argomentazione nelle sue finalità di produzione, verifica e giustificazione di affermazioni dalla deduzione formale […]. La centralità assunta dal problem solving e dall'argomentazione nella formazione e nella ricerca educativa in campo matematico è stata una conseguenza, negli ultimi quarant'anni, di un dato storico inconfutabile: calcolatrici e computer sono in grado di fornire in modo assai efficace ed economico tutte le prestazioni matematiche di tipo esecutivo e, nello stesso tempo, richiedono competenze, in parte nuove, di decisione, di scelta, di controllo e di padronanza concettuale connesse con tali potenzialità esecutive». [2]

[2] Il testo citato è parte del contenuto di un documento di lavoro distribuito agli autori delle prove di matematica, nel corso della Seminario di produzione delle prove Invalsi, svoltosi in Dobbiaco nel luglio del 2015. Il documento si intitola: "Prove Invalsi, a proposito della definizione delle macro-aree di competenza (conoscere, risolvere problemi, argomentare)".

Dal punto di vista normativo, la lettura delle recenti Indicazioni Nazionali per il Curriculum del I ciclo, del 2012 evidenzia come lo sviluppo di competenze nel campo della risoluzione dei problemi e argomentative sia un traguardo fondamentale di tutta l'educazione matematica dai 3 ai 14 anni: un traguardo dunque da sviluppare in verticale, ma anche trasversale alle diverse discipline e soprattutto ritenuto cruciale nella formazione del cittadino adulto.

Con le attuali Indicazioni Nazionali per il Curricolo del 2012 l'argomentazione ha assunto rilievo già nei traguardi della scuola primaria, come possiamo rilevare leggendo le voci specifiche:

- legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici;

- costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri»;

-produce argomentazioni in base alle competenze teoriche acquisite […] (scuola secondaria di primo grado).

In Svizzera l'aspetto di competenza "Comunicare e Argomentare" è uno dei processi chiave che rientra tra le Competenze fondamentali per la matematica del Concordato Harmos (CDPE, 2011)[…]. Un aspetto particolarmente interessante, e forse non sempre conosciuto, è il fatto che, essendo argomentazione e problem solving traguardi per lo sviluppo delle competenze, siano prescrittivi e dunque sicuramente essenziali. Problem solving e argomentazione inoltre sono ovviamente tra loro legati: per valutare la risoluzione di un problema dobbiamo avere informazioni sia sui processi attivati (quindi è necessaria la spiegazione) sia sulle giustificazioni delle scelte fatte (quindi la vera e propria argomentazione (Di Martino, 2016, p. 25).

Dopo aver esaminato i punti di vista epistemologico e normativo, si focalizza l'attenzione sull'a spetto didattico: i nostri allievi, a tutti i livelli scolari, fanno molta fatica ad affrontare problemi che richiedono argomentazione. Negli ultimi anni anche le rilevazioni nazionali (INVALSI) e internazionali (per esempio OCSE-PISA) forniscono dati che confermano le difficoltà dei nostri allievi nel rispondere a quesiti che richiedono di spiegare il perché di una determinata risposta data oppure di riconoscere la correttezza di determinate argomentazioni presentate (Ibid.).

Questi risultati possono essere spiegati sia pensando alle difficoltà intrinseche di maturare capacità e competenze sull'argomentazione legata alla risoluzione dei problemi, sia ammettendo che raramente nelle ore di matematica viene richiesto agli allievi di risolvere veri problemi (non esercizi) e di argomentare.

Si potrebbe ipotizzare che le due cose siano collegate: il percepire certe richieste troppo alte e difficili può condurre l'insegnante ad evitare di farle, per il timore di mettere troppo in difficoltà i propri allievi o perché convinti che non ci possano riuscire. Spesso, infatti, è proprio la dichiarazione delle presunte difficoltà degli allievi ad essere usata come motivazione per non lavorare su problem solving e argomentazione (Di Martino, 2016, p. 26).

A questo proposito, due sono le riflessioni che bisognerebbe condividere con chi dichiara tali convinzioni:

1. è naturale che gli allievi possano incontrare delle difficoltà nel maturare certe competenze, considerando che si tratta di competenze complesse che costituiscono traguardi significativi, ai quali bisognerebbe dedicare percorsi lunghi e riservare tempo e attenzione;
2. è importante effettuare una valutazione dei possibili danni che una scelta didattica improntata su richieste esclusivamente procedurali, e sull'enfasi relativa ai prodotti e non ai processi, comporta (ibid.).

I risultati di una ricerca sul rapporto con la matematica degli studenti italiani, basata sulla raccolta di circa 1 500 temi autobiografici dal titolo: "Io e la matematica", hanno confermato quanto sia radicata la convinzione che in matematica non si possano esprimere opinioni e come questa convinzione sia spesso uno dei motivi dichiarati per l'avversione verso una disciplina percepita come arida e distante (Di Martino & Zan, 2005; Di Martino, 2015).

Alcune scelte dell'insegnante, dunque, come quella di dare poco spazio al problem solving e all'argomentazione per evitare di mettere in difficoltà gli allievi possono in realtà rivelarsi controproducenti e dannose.

La convinzione è che sia fondamentale passare dall'idea che la matematica non sia un'opinione al fatto che in matematica le opinioni contano e che anzi è fondamentale imparare ad esplicitarle, difenderle, assumersene la responsabilità (Di Martino, 2016, p. 28).

Nello schema tradizionale utilizzato dall'insegnante in classe, in base al quale si fa vedere agli studenti come si fa, magari anche più di una volta, un determinato compito, logicamente è problematico richiedere di argomentare i processi di pensiero. Nel momento in cui si propone in aula una matematica che privilegia le richieste riproduttive, si alimenta la convinzione che non sia richiesto in matematica di fare delle scelte, perché le scelte sono effettuate da altri e lo studente si deve adeguare ad esse. Il mostrare, inoltre, "come si fa" viene interpretato dagli allievi come un "come si deve fare "(ibid.)

Per poter lavorare sui due aspetti della risoluzione dei problemi e dell'argomentazione potrebbe essere utile avere a disposizione delle buone prove, dei bei problemi, che si prestino a un lavoro ricco nel senso descritto (Di Martino, 2016, p. 29).

Capitolo secondo

Il concetto di convinzione

2.1. Le convinzioni: evoluzione di un concetto

Il termine "convinzione" (o "credenza"), traduzione dall'inglese *belief,* è mutuato dalla psicologia sociale (Rokeach, 1960).
Per D'Amore e Fandiño Pinilla (2004, p. 28) vale la seguente definizione di convinzione:

« convinzione (belief) (o credenza): opinione, insieme di giudizi/attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa; l'insieme delle convinzioni di qualcuno (A) su qualcosa (T) dà la concezione (K) di A relativamente a T; se A appartiene ad un gruppo sociale (S) e condivide con gli altri appartenenti ad S quell'insieme di convinzioni relativamente a T, allora K è la concezione di S relativamente a T».

Le convinzioni e i sistemi di convinzioni cominciarono ad essere esaminati all'inizio di questo secolo; presto, però, il comportamentismo cominciò a dominare la ricerca nei campi psicologici. Fu così che l'attenzione fu rivolta agli aspetti osservabili del comportamento umano e le convinzioni furono quasi dimenticate.

Il nuovo interesse per le convinzioni e i sistemi di convinzioni emerse principalmente negli anni '70, attraverso gli sviluppi nelle scienze cognitive (Abelson, 1979, cit. da Furinghetti & Pehkonen, 2002, pp. 39-40; nostra trad.).

Gli individui ricevono continuamente segnali dal mondo che li circonda. Secondo le loro percezioni ed esperienze, basate su questi messaggi, traggono conclusioni su diversi fenomeni e sulla loro natura. La conoscenza soggettiva degli individui, cioè le loro convinzioni (compresi i fattori affettivi) sono una composizione di queste conclusioni.

Le convinzioni, che gli individui confrontano con nuove esperienze e con le convinzioni di altri individui, sono continuamente valutate e si possono modificare. Quando viene adottata una nuova convinzione, questa farà automaticamente parte della struttura più ampia della conoscenza soggettiva degli individui, cioè del loro "sistema di convinzioni". Da questo momento in poi le convinzioni non appaiono mai completamente indipendenti. Quindi, il sistema di convinzioni di un individuo è composto dalle sue convinzioni consce o inconsce, dalle ipotesi o aspettative e dalle loro combinazioni. (Green, 1971).Schoenfeld (1985, p. 44) chiarisce ulteriormente la sua posizione interpretando le convinzioni: «*a san individual's understandings and feeling that shape the ways that the individual conceptualizes and engages in mathematical behavior*». Lester, Garofalo e Kroll (1992, p. 358) spiegano: «*beliefs constitute the individual's subjective knowledge about self, mathematics, problem solving, and the topics dealt with in problem statements*».

Törner e Grigutsch (1994) etichettano il loro oggetto di ricerca come la «visione del mondo matematico»; in un articolo di Grigutsch, Raatz & Törner (1998) questo concetto è ulteriormente elaborato e inserito nella teoria degli atteggiamenti. Bassarear (1989) considera atteggiamenti e convinzioni agli estremi opposti di una dimensione bipolare.

La posizione delle convinzioni nella dimensione affettivo-cognitiva può essere vista in modi diversi: se consideriamo le connessioni tra convinzioni e conoscenza, vediamo le convinzioni principalmente come rappresentative della struttura cognitiva degli individui. Se consideriamo le convinzioni come una forma di reazione verso una certa situazione, allora consideriamo le convinzioni più legate all'aspetto affettivo.

Nelle ricerche internazionali sono stati utilizzati entrambi i punti di vista (Furinghetti & Pehkonen, 2002, p. 41; nostra trad.). Alcuni ricercatori considerano le convinzioni come parte reale dell'elaborazione cognitiva. La maggior parte dei ricercatori riconosce che quelle convinzioni contengono alcuni elementi affettivi.

Pian piano l'accezione data al termine '*beliefs*' si allarga. McLeod (1985, p. 268, cit. da Zan, 2010, p. 169) è uno dei primi ricercatori a sottolineare la necessità di sistemare teoricamente il concetto di convinzione; scrive:

> «I sistemi di convinzioni possono essere applicati al contenuto matematico, per esempio, o all'idea che un individuo ha delle proprie possibilità di successo nel risolvere un problema ».

McLeod (1989,1992, cit. da Di Martino, 2004, p. 51) cerca di inquadrare la ricerca e di costruire una teoria intorno al concetto di convinzione. Le ricerche sono state affrontate avendo in mente due paradigmi: quello "normativo", tendente a stabilire dei rapporti di causalità tra convinzioni e comportamento e quello "interpretativo", che considera le convinzioni come un concetto dell'osservatore, utile come strumento di interpretazione del comportamento.

I sistemi di convinzioni possono essere applicati al contenuto matematico o all'idea che un individuo ha delle proprie possibilità di successo nel risolvere un problema. Zan (2010[2], p. 169) scrive:

«Come già in Psicologia sociale, anche in Educazione matematica l'attenzione iniziale dei ricercatori è rivolta più all'elaborazione di strumenti d'osservazione che alla sistemazione teorica del costrutto, in particolare alla sua definizione. È difficile trovare definizioni esplicite di "convinzione" e laddove ci sono, appaiono estremamente ingenue; d'altra parte questa ambiguità teorica espone molti studi sperimentali a critiche di circolarità: spesso non è chiaro se l'influenza delle convinzioni sul comportamento sia quello che si assume o quello che si voglia verificare (Lester, 2002) ».

Quello di convinzione è uno dei concetti utilizzati in educazione matematica per descrivere fenomeni significativi dal punto di vista didattico. Secondo tale modello, il discente, e più in generale l'individuo, continuamente interpreta il mondo intorno a sé, mettendo in relazione i fatti osservati con le esperienze precedenti: le convinzioni sono proprio il risultato di questo continuo tentativo di dare un senso alla realtà, e nello stesso tempo determinano gli schemi con cui l'individuo si avvicina al mondo e quindi interpreta l'esperienza futura (ibid.).Le convinzioni sono pertanto filtri, non illusioni: è fondamentale decifrare come vediamo, poiché la percezione influenza l'apprendimento a prescindere dal suo contenuto di verità. L'ubriaco o il folle vede "davvero" un muro davanti a sé e si comporta come se esistesse, tanto per fare un esempio limite.

Secondo il modello di Green le convinzioni si organizzano per lo più in strutture relativamente stabili: i cosiddetti "sistemi di convinzioni". (Zan, 2010, p. 170). Le relazioni tra le convinzioni non possono essere definite logiche, in quanto alcune possono anche essere in contraddizione con altre. Gardner (1991, trad. it. p. 1, cit. da Zan, 2010, p. 170) osserva che i bambini portano nella loro coscienza un gran numero di copioni, stereotipi, modelli e credenze; tali schemi concettuali possono celare anche contraddizioni interne [...]. Tali contraddizioni, però, vengono notate solo raramente, e anche quando lo sono, non turbano il bambino.

Anche gli adulti portano con sé analoghi complessi di enunciati e sentimenti conflittuali, la cui natura contraddittoria raramente diventa motivo di turbamento nella vita di ogni giorno.

Ogni persona ha nel suo sistema di convinzioni una struttura che posiamo quindi definire quasi-logica, nel senso che ci sono alcune convinzioni "primarie" e altre "derivate". Può capitare che in una persona, con il passare del tempo, due convinzioni si scambino i ruoli: ciò che prima era primario diventa derivato e viceversa (Di Martino, 2004, p. 66).

Questa dimensione quasi-logica può avere delle importanti conseguenze nel momento in cui si tenta di modificare una convinzione. Se ci si pone come obiettivo quello di modificare una convinzione A, che nel sistema di convinzioni dell'individuo è derivata, è chiaro che risulteranno poco efficaci gli interventi che non si preoccupino di incidere sulla convinzione primaria da cui la convinzione A deriva.

Importante è dunque ricostruire i legami tra le convinzioni tenute dall'individuo; ciò non è facile affatto se non è proprio l'individuo ad esplicitare certe connessioni, in quanto non è semplice riconoscere i criteri logici personali sui quali si basano i legami da individuare (Di Martino, 2004, p. 67).

Nell'insieme delle convinzioni che una persona ha, non tutte hanno la stessa importanza. Avendo in mente una rappresentazione spaziale, ci sono convinzioni che sono psicologicamente "centrali" e altre che sono psicologicamente "periferiche". Spesso le convinzioni psicologicamente centrali sono quelle centrate su di sé, ossia quelle che scatenano le emozioni più forti; più la convinzione è psicologicamente centrale e meno siamo disposti a metterla in discussione (ibid.).

Una convinzione può essere centrale, ma non primaria, e viceversa. Uno studente, ad esempio, può ritenere che chi è intelligente ha senz'altro successo in matematica (convinzione primaria) e dedurre, a causa del proprio fallimento, di aver fallito perché non abbastanza intelligente (convinzione derivata); quest'ultima, seppure sia una convinzione derivata, avrà maggiore forza psicologica di quella da cui deriva; sarà quindi centrale (Zan, 2010, p. 171).

Si focalizza ora l'attenzione sull'influenza dei sistemi di convinzioni sui processi decisionali.

Secondo Schoenfeld (1983, cit. da Zan, 2010, p. 172), nelle decisioni prese da un soggetto che deve risolvere un problema sono particolarmente significative:

-le convinzioni sul compito
-le teorie del successo
-le convinzioni sulla disciplina
-le convinzioni su di sé.

La distinzione tra tali convinzioni è puramente teorica, in quanto i vari tipi di convinzioni interagiscono profondamente e nascono dall'esigenza di dare un senso ad una realtà complessa quale è l'esperienza matematica, in cui sono coinvolti tanti elementi: la classe, l'insegnante, il curricolo, la famiglia. Il ruolo di tali elementi si amplifica perché le esperienze degli allievi si realizzano con un determinato gruppo classe, con un certo insegnante, attraverso specifiche attività. Tali elementi acquistano quindi un ruolo di mediazione molto importante (Zan, 2010, p.172).

Assumono poi particolare importanza le convinzioni che un allievo ha su cosa voglia dire avere successo in matematica, gli obiettivi e le aspettative che un insegnante, le cause del successo e le strategie da attivare per avere successo oppure per garantire successo (in sintesi, le teorie del successo).

2.1.1. Le convinzioni sul compito

Un esempio di convinzioni sul compito è costituito dalle convinzioni che gli allievi hanno sui problemi. Schoenfeld (1985b, cit. da Zan, 2010, p. 174) osserva che molti studenti hanno convinzioni generali spesso implicite rispetto al problem solving:

- la matematica formale ha poco a che fare con il pensiero reale e con il problem solving;
- i problemi di matematica si possono sempre risolvere in meno di dieci minuti;
- solo i geni sono in grado di scoprire e creare in matematica.

In alcune ricerche condotte da Zan (1991 e 1992; Zan, 1998), nelle quali ci si proponeva di far emergere le convinzioni dei bambini sui problemi, si delineano due modelli concettuali distinti e indipendenti di problema reale e problema scolastico, e quest'ultimo è identificato in genere con il problema di matematica, anche se in realtà l'approccio strutturale (il problema richiede l'uso di ragionamenti) non distingue tra problema reale e scolastico. Inoltre, gli schemi in base ai quali i bambini riconoscono un problema matematico portano a definire diverse categorie di soggetti (Poli & Zan, 1996, a, b):

- i formalisti: riconoscono il problema dalla presenza di numeri e di una domanda;
- gli strutturali: il problema richiede l'uso di ragionamenti;
- gli operativi: il problema richiede l'uso di operazioni aritmetiche;
- i pragmatici: il problema viene presentato nell'ora di matematica.

2.1.2. *Le teorie del successo*

Le teorie del successo comprendono le convinzioni sugli obiettivi dell'insegnamento e sulle aspettative degli insegnanti, le convinzioni su cosa vuol dire avere successo in matematica, su quali sono le cause del successo e le strategie da attivare per avere successo o per garantire successo (Zan, 2010, p. 175).
Le ricerche hanno messo in luce alcune convinzioni:

per studiare matematica basta fare esercizi, non è necessario studiare la teoria: la teoria che è oggetto di spiegazione dell'insegnante o dei libri di testo viene interpretata come istruzioni per l'uso e quindi può essere dimenticata quando si acquisisce la tecnica.

Il buon senso in matematica non serve: spesso l'insegnante rimane sconcertato di fronte a comportamenti irrazionali di uno studente che rimane bloccato rispetto a un passaggio che richiederebbe solo un po' di "buon senso". In realtà ciò che l'insegnante intende per buon senso è l'uso di una razionalità interna alla matematica, che rispetti le sue regole e la sua struttura di disciplina teorica e che ha come strumento privilegiato il ragionamento deduttivo. Il buon senso può essere lontano dal senso comune, i cui strumenti fondamentali sono l'intuizione e le scorciatoie suggerite dall'osservazione (ibid.).

Per imparare la matematica ci vuole tanta memoria: tale convinzione differenzia gli alunni che manifestano difficoltà in matematica dagli alunni che non le hanno. In genere i "bravi" in matematica ritengono che sia più importante capire questa materia e considerano la memoria meno importante che in altre discipline. In realtà potrebbe essere che l'importanza attribuita alla memoria nello studio della matematica non sia una convinzione primaria, ma che derivi dalla convinzione di non essere in grado di capire: se l'allievo non è in grado di capire, potrebbe doversi accontentare del memorizzare (ibid.).

Per andare bene in matematica bisogna essere portati: questa convinzione di per sé non influisce sull'investimento di risorse in matematica, ma piuttosto è in interazione con la convinzione: «[…] Ed io non sono portato…». All'interno dei sistemi di convinzioni, le convinzioni che un soggetto ha di sé sono particolarmente significative (perché psicologicamente centrali).

Ai diversi modi di vedere il successo corrispondono diverse teorie: se il successo viene identificato con il buon rendimento, l'allievo dirigerà l'impegno nella direzione che a suo parere l'insegnante ritiene "giusta". Indicatori di successo diventano anche comportamenti che di solito sono premiati dagli insegnanti, come la velocità nel dare risposte e la loro correttezza; in questo senso il tempo e gli errori possono diventare nemici (Zan, 2010, p. 177).

Le teorie del successo cambiano con il passare del tempo e con il cambiamento di contesto (ordine di scuola, insegnante,…). Nel passare da un ordine di scuola all'altro non cambiano solo i programmi, ma anche le richieste degli insegnanti (ibid.). Spesso la mancanza di raccordo tra i diversi livelli di scuola è legata alla mancata esplicitazione delle teorie del successo degli insegnanti.

2.1.3. Le convinzioni sulla matematica

Le convinzioni sul successo riflettono la visione della matematica, spesso implicita e in continua evoluzione. La convinzione che in matematica il buon senso non serva rimanda ad una visione della disciplina come un'attività priva di senso, che rimane estranea all'allievo. Le convinzioni che sottolineano il ruolo della memoria suggeriscono una visione della matematica come disciplina di prodotti e non di processi.

La convinzione che per andare bene in matematica basta saper fare esercizi rimanda ad una visione strumentale della disciplina (Skemp, 1976, cit. da Zan, 2010, p. 179), secondo la quale la matematica è un insieme di formule da memorizzare ed applicare, alla quale si contrappone una visione relazionale, secondo cui la matematica è caratterizzata da relazioni ed anche l'applicazione di formule prevede la comprensione del perché tali formule funzionino. Rispetto alla prima visione, il significato del capire è riferibile ad un meccanismo da ricordare, a delle regole da memorizzare. Nella seconda visione il capire è associabile alle parole ragionamenti, teoria, tempi lunghi.

Skemp osserva anche che in classe si possono presentare combinazioni diverse tra visioni degli insegnanti e visioni degli allievi:
1. allievo: visione relazionale; insegnante: visione relazionale;
2. allievo: visione strumentale; insegnante: visione strumentale;
3. allievo: visione strumentale; insegnante: visione relazionale;
4. allievo visione relazionale; insegnante: visione strumentale.

Le combinazioni più problematiche sono quelle in cui l'allievo e l'insegnante hanno due visioni diverse della matematica, perché il successo sancito dall'insegnante è diverso dal successo riconosciuto dall'allievo (Zan, 2010, p. 180).

2.1.4. *Le convinzioni su di sé*

Molto importanti sono le convinzioni che si ha delle proprie risorse rispetto all'attivazione di adeguati processi di controllo. Spesso si è riscontrato che si resiste all'apprendimento soprattutto da parte di quei bambini che si sono auto-diagnosticati incompetenti. Questo tipo di convinzioni possono avere un effetto paralizzante sull'apprendimento e costruire una formidabile barriera affettiva, impedendo ai soggetti di utilizzare energie e risorse necessarie per attivare quei processi di controllo che gli permettano di non riuscire. (Zan, 2010, p. 181).

2.2. Rapporti tra convinzioni e conoscenze

La definizione classica di conoscenza che proviene da Platone afferma che «la conoscenza è giustificata dalla verità». Quando si tratta di studiare le convinzioni e i termini correlati, è consigliabile:

> «considerare due tipi di conoscenza (conoscenza oggettiva e conoscenza soggettiva); considerare le convinzioni come appartenenti alla conoscenza soggettiva; includere fattori affettivi nei sistemi di convinzioni e distinguere affettivo e cognitivo, se necessario; prendere in considerazione i gradi di stabilità e riconoscere che le convinzioni sono aperte al cambiamento; prendersi cura del contesto (ad es. popolazione, soggetto, ecc.) e dell'obiettivo di ricerca entro il quale vengono considerate le convinzioni» (Furinghetti & Pehkonen, 2002, pp. 42-43, nostra trad.).

Questa dicotomia tra conoscenza oggettiva e conoscenza soggettiva ci aiuta a situare e a comprendere le convinzioni e le conoscenze per quelle che sono le loro specificità; nello stesso tempo ci permette di distinguerle le une dalle altre. (Pehkonen & Pietilä, 2003, p. 2; nostra trad.).

"Conoscenza oggettiva" in matematica significa struttura generalmente accettata della Matematica, intesa come composizione del lavoro dei matematici nel tempo.

La "conoscenza soggettiva" di un individuo è qualcosa di unico, che di solito è posseduto solo dal sé individuale, poiché è basato sulle proprie esperienze e comprensione personali; le convinzioni appartengono alla conoscenza soggettiva (Pehkonen & Pietilä, 2003, p. 3; nostra trad.).

La differenza tra questi due tipi di conoscenza può essere presentata come segue: la conoscenza oggettiva è accettata dalla comunità di ricerca, mentre la conoscenza soggettiva non è necessariamente valutata dall'esterno. Le convinzioni matematiche appartengono alla conoscenza soggettiva di un individuo e, se vengono presentate come affermazioni, possono (o possono non essere) logicamente vere (ibid.) .

La proprietà della verità può essere descritta con l'aiuto della probabilità: la conoscenza oggettiva è vera con una probabilità del 100%, mentre nel caso della convinzione la probabilità corrispondente è solitamente inferiore al 100%. Pertanto, questa è una delle proprietà distintive tra conoscenza e convinzione.

Quando parliamo di conoscenza, questo significa che l'individuo è sicuro al 100% di quella convinzione. Nella scienza ci sforziamo di raggiungere una conoscenza oggettiva permanente e immutabile, ma non sempre abbiamo successo (nemmeno in Matematica). A volte anche la comunità di ricerca dei matematici è stata costretta ad ammettere di aver accettato una falsa convinzione come verità matematica.

Pehkonen e Pietilä (2003) approfondiscono anche le connessioni tra conoscenza soggettiva e conoscenza oggettiva. Da un lato, l'individuo può studiare matematica (conoscenza oggettiva) e quindi ampliare la propria struttura di conoscenza soggettiva. L'argomento del suo studio potrebbe essere, per esempio, il concetto di funzione, sul versante della conoscenza oggettiva. La conoscenza sulla funzione che (lui o lei) adatta (Piaget direbbe "accomoda") appartiene sempre alla sua struttura di conoscenza soggettiva, sebbene la sua concezione di funzione possa avvicinarsi al concetto "ufficiale" di funzione.

La sua conoscenza soggettiva in matematica, quindi, contiene, tra l'altro, la sua concezione della matematica nel suo complesso, e anche concezioni sulla conoscenza matematica dettagliata. D'altra parte, la conoscenza soggettiva dell'individuo può arricchire la conoscenza oggettiva comune, quando parte della sua conoscenza soggettiva è stata presentata in pubblico, è giustificata, è stata discussa ed è accettata socialmente (ad esempio sotto forma di un documento scientifico) .

La distinzione tra concezione e conoscenza oggettiva è complicata dal fatto che la concezione individuale di un determinato concetto può essere considerata come una "immagine" di quel concetto. Dato che un'immagine e il suo oggetto non sono gli stessi, e di solito l'immagine mostra solo un punto di vista dell'oggetto, allo stesso modo una concezione rappresenta solo parzialmente il suo oggetto (concetto) (Pehoken & Pietilä, 2003, p. 4; nostra trad.).

2.3. Rapporti tra convinzioni, atteggiamenti ed emozioni

Si accostano ora le convinzioni ad altri concetti principali, atteggiamenti ed emozioni, che appartengono al dominio affettivo. McLeod 1992, p. 578 cit. da Pehkonen & Pietilä, 2003, p. 5; nostra trad.) divide il dominio affettivo in: emozioni, atteggiamenti e convinzioni. Questi termini variano in termini di stabilità, intensità, coinvolgimento cognitivo e durata del loro sviluppo. Le emozioni, i sentimenti negativi o positivi sono più intensi e meno stabili. Esempi di sentimenti negativi intensi sono paura, rabbia, orrore o panico. Ci sono diversi atteggiamenti nei confronti della Matematica: «Sono interessato al calcolo percentuale» e «Le frazioni sono noiose».

È importante notare che la Matematica è una vasta area e che gli alunni possono avere diversi atteggiamenti nei confronti di diverse parti di essa. Gli atteggiamenti possono formarsi in due modi diversi: la ripetizione delle reazioni emotive può stabilizzarsi in un atteggiamento; ad esempio, se un allievo ha molte esperienze negative nell'esecuzione di compiti geometrici, la reazione a compiti simili può diventare più automatica e stabile.

Un atteggiamento si può formare però anche sulla base di un atteggiamento già esistente, riferito a un compito nuovo ma correlato. È ad esempio possibile che l'alunno, che ha un atteggiamento negativo nei confronti delle dimostrazioni in algebra, possa attribuire lo stesso atteggiamento alle dimostrazioni in geometria (McLeod 1992, p. 581, cit. da Pehkonen & Pietilä, 2003, p. 5).

La differenza tra questi concetti può essere caratterizzata in modo simbolico: le emozioni sono "calde", le attitudini "fresche" e le credenze "fredde". Il seguente schema, presentato con la figura 3, sintetizza la visione della Matematica (Pehkonen & Pietilä, 2003, p. 6).

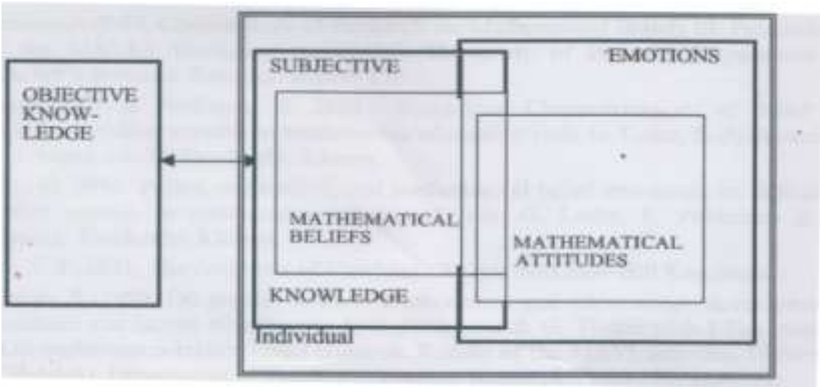


Figura 3: *Relazioni tra i concetti principali nelle convinzioni*

Nella conoscenza, spiegano gli Autori citati, distinguiamo una parte oggettiva e una parte soggettiva; la prima è situata al di fuori dell'individuo (Sfard, 1991, cit. da Pehkonen & Pietilä, 2003, p. 6; nostra trad.).

Tuttavia, le conoscenze oggettiva e soggettiva sono in interazione l'una con l'altra e si intersecano. Si può pensare a quando un alunno ha conoscenza delle sue emozioni e riconosce, ad esempio, quando ha risolto un compito difficile, di provare gioia e soddisfazione.

Le convinzioni matematiche riguardano sia la conoscenza soggettiva che gli atteggiamenti. Questi due sottodomini si intersecano, dal momento che possono rappresentare dichiarazioni che possono essere comprese contemporaneamente sia come convinzioni che come atteggiamenti. Per esempio, l'affermazione: "Io non sono bravo nei calcoli mentali" può essere intesa come una convinzione che riguarda sé stessi, ma anche un atteggiamento verso la matematica (Pietilä, 2002, cit. da Pehkonen & Pietilä, 2003, p. 6; nostra trad.).

2.4. Insegnanti, insegnamento e convinzioni

La ricerca sugli insegnanti, sull'insegnamento e sul cambiamento nella scuola è stato un tema centrale nel dibattito pedagogico internazionale della seconda metà del Novecento (Vannini, 2012, p. 49).

A metà degli anni '70 le ricerche sull'insegnamento si sono spostate dagli studi sui fenomeni osservabili, come il comportamento dell'insegnante, agli studi sui processi decisionali dell'insegnante. Accanto ai filoni fondamentali, che hanno centrato l'attenzione sull'analisi del metodi e dei comportamenti didattici, è emersa l'importanza data agli studi dei cognitivisti, che hanno focalizzato la loro attenzione su tutto ciò che, in termini di pensiero e atteggiamento, si pone dietro l'azione (ibid.).

Richardson (2002, cit. da Vannini, 2012, p. 49) osserva che negli Stati Uniti, e in tutto il mondo anglosassone, nasce un vero e proprio movimento di ricercatori interessati allo studio dei processi cognitivi e decisionali che gli insegnanti mettono in atto nelle loro prassi didattiche.

Si parla di *teachers' beliefs*, di "credenze" o convinzioni degli insegnanti sulla scuola, sulla didattica, sulla propria professione e sul l'apprendimento degli allievi. Ciò che più interessa è capire quali siano le relazioni tra tali convinzioni e le prassi di insegnamento e quali ricadute esse possano avere sulla professionalità del docente e sull'efficacia della didattica. (Vannini, 2012, pp. 49-50).

L'insegnamento è un complesso di pratiche efficaci se sostenute da reali competenze; la competenza viene definita da Perrenoud (1999, trad. ital. 2002, p. 14, cit. da Vannini, 2012, p. 50), in linea con quanto scritto negli studi OCSE (cfr. OCSE-OECD, 2001), come una «capacità di mobilitare risorse cognitive per far fronte a un insieme di situazioni».

Per descrivere il funzionamento di una competenza, Perrenoud parla di «operazioni mentali complesse, sottese da schemi di pensiero che permettano di determinare, più o meno consciamente e rapidamente, e di realizzare, più o meno efficacemente, un'azione relativamente adatta alla situazione» (ibid.).

La competenza, dunque, ha sempre a che fare con l'azione, ma anche con il pensiero in situazione, ovvero con ciò che non è visibile, è latente, che rimane dietro le pratiche didattiche e non può essere, pertanto, osservato. Per quanto non osservabile, la competenza è tuttavia un sapere in situazione e nello stesso tempo un sapere trasferibile, a differenza della conoscenza che è disciplinarmente situata. Si tratta di aspetti cognitivi relativi ai saperi dell'insegnante, ma anche a costrutti, quali le motivazioni, gli atteggiamenti, le rappresentazioni, le convinzioni

Sono questi tutti elementi capaci di determinare processi di cambiamento e innovazione nelle realtà educative, se orientati verso valori pedagogici propri di una scuola democratica (Vannini, 2012, p. 50). La connessione tra aspetti cognitivi e pratiche di cambiamento si può interpretare alla luce delle teorie costruttiviste dell'apprendimento. Esse suggeriscono che ogni individuo crea nuove rappresentazioni della realtà e nuovi schemi di azione in essa, grazie all'elaborazione dei propri saperi, delle proprie convinzioni e delle nuove idee con le quali ciascun insegnante viene in contatto, all'interno della realtà stessa (Vannini, 2012, pp. 50-51)

L'insegnante affronta ripetutamente situazioni che lo costringono a prendere dec isioni, che riguardano sia la soluzione di problemi che sorgono nella classe sia l'identificazione degli stessi (Malara & Zan, 2008, p. 1). Nella ricerca sull'insegnamento diventano importanti i seguenti problemi:

- l'individuazione delle decisioni degli insegnanti che influenzano l'apprendimento degli alunni e lo studio della natura di tale influenza;
- la scoperta dei fattori che influenzano tali decisioni; le decisioni dell'insegnante che vive l'insegnamento come una situazione problema, piuttosto che come routine, saranno influenzate dalle sue conoscenze, ma anche dalle sue abilità metacognitive, dalle sue convinzioni e dalla sue emozioni (Zan, 2000, p. 51).

A partire dalla seconda metà degli anni '80, gli studi dei cognitivisti hanno indagato in modo particolare su quegli aspetti "latenti" del pensiero che influenzano i comportamenti dei docenti: le immagini di insegnamento e di insegnante che si danno ai soggetti e che ne influenzano la pratica.

Il concetto di convinzione fa riferimento dunque a un costrutto mentale di un individuo (o di un gruppo sociale, nel caso si tratti di convinzione diffusa) che si forma in relazione a ciò che il soggetto già conosce e alle nuove esperienze con l'ambiente. Richardson (1996, cit. in Vannini, 2012, p. 51) mette in luce soprattutto questo concetto di *beliefs,* da intendersi come quelle convinzioni che interagiscono con la prassi e ne influenzano il cambiamento. Tali convinzioni sono importanti elementi predittori delle pratiche professionali e richiedono una particolare attenzione nel momento in cui si vuole mettere in atto un qualsiasi processo di cambiamento e di innovazione, in quanto, agendo su tali convinzioni, possiamo indirettamente agire sui comportamenti. Molteplici studi, inoltre, hanno verificato la relazione inversa: la modifica della pratica può intervenire ed agire sul cambiamento di percezioni, convinzioni, atteggiamenti (Vannini, 2012, p. 53).

L'essere umano si costruisce sulla base delle esperienze quotidiane e delle concettualizzazioni che si organizzano in insiemi coerenti e sistematici che le rendono difficilmente modificabili con la sola aggiunta di informazioni o fatti. Perché il cambiamento possa avvenire, c'è necessità di una modificazione profonda della teoria esistente (Carey, 1999; Vosniadou, 1994, cit. da Vannini, 2012, p. 54).

Ci si può interrogare su quando e come si strutturano le convinzioni degli insegnanti sull'insegnamento; su quali sono le teorie implicite sulla scuola e sull'educazione e su quali siano i processi che possono permettere la loro messa in crisi, per poter modificare comportamenti dell'insegnante (Vannini, 2012, p. 55).

Esplicitare le convinzioni latenti in contesti di formazione iniziale e in servizio degli insegnanti è la via maestra da percorrere, pur ammettendo che restano sul piano delle ipotesi le modalità pratiche attraverso le quali prosegue la ricerca (ibid.).

Molti studi sull'insegnamento e sulla formazione dei docenti degli ultimi anni hanno affrontato tale tematica, e si profila all'attenzione il concetto di "riflessività" applicata alla professionalità dei docenti, che fa riferimento alla prospettiva deweyana da una parte e alle ipotesi teoriche di Schön (1983) sull'apprendimento degli adulti dall'altra, dando valore all'accompagnamento degli insegnanti in percorsi di progressiva assunzione di consapevolezza, a partire dal senso comune, fino ad arrivare a una competenza professionale sempre più piena.

La formazione degli insegnanti (sia iniziale che in servizio) dovrebbe sempre partire dal fare esplicitare ai docenti le proprie convinzioni, al fine di poter poi agire su di essi attraverso azioni che favoriscono processi di razionalità, che siano adatti ad analizzare e a mettere in crisi convinzioni connesse a pratiche inefficaci, per poter costruire nuove convinzioni e atteggiamenti pedagogicamente fondati.

Capitolo terzo

Le convinzioni degli insegnanti sui problemi matematici

3.1. La ricerca internazionale

La risoluzione dei problemi è una competenza chiave e un mezzo importante per lo sviluppo di altre competenze matematiche e non matematiche. Eppure, nonostante l'inclusione di essa nella maggior parte dei programmi scolastici, rimane un concetto non chiaro e poco integrato nei repertori professionali degli insegnanti (Andrews & Xenofontos, 2014, p. 299; nostra trad.).

È auspicabile che gli insegnanti, che devono aiutare gli alunni a diventare dei buoni risolutori di problemi, siano competenti nella risoluzione degli stessi, così come è importante che siano motivati a impegnarsi in questo tipo di lavoro. (Leikin & Kawass, 2005, cit. da Andrews & Xenofontos, 2014, p. 302; nostra trad.).

Le ricerche effettuate a livello internazionale evidenziano che anche in Finlandia, dove nelle prove OCSE-PISA gli studenti hanno riportato risultati elevati in matematica, gli insegnanti sembrano essere impreparati a lavorare con i loro allievi nella risoluzione dei problemi matematici (Ryve et alii, 2011, cit. da Andrews & Xenofontos, 2014, p. 302; nostra trad.). Negli ultimi venti anni sono stati pubblicati numerosi studi sulle convinzioni che i docenti hanno sulla risoluzione dei problemi.

Burns e Lash (1988, cit. da Pehkonen, 2017, p. 17) esaminarono in che modo le convinzioni dei docenti sull'insegnamento della matematica influenzassero i modi in cui pianificavano la loro pratica didattica sulla risoluzione dei problemi. I risultati delle indagini evidenziarono che gli insegnanti avevano una conoscenza limitata delle tecniche di insegnamento e che le loro preoccupazioni si concentravano maggiormente sulla raccolta di materiali e di risorse, piuttosto che sul come insegnare a risolvere problemi.

Grouws et alii (1990, cit. da Pehkonen, 2017, p. 17) intervistarono 25 insegnanti della scuola secondaria inferiore riguardo alle convinzioni e alle pratiche di insegnamento sui problemi.
Le definizioni di problem solving date dagli insegnanti intervistati furono classificate in quattro gruppi:

1. risolvere compiti verbali;
2. trovare soluzioni per compiti dati;
3. risolvere compiti pratici;
4. risolvere compiti che richiedono pensiero.

Pehkonen (1993, cit. in Pehkonen, 2017, p. 17) studiò le convinzioni dei formatori degli insegnanti finlandesi sull'implementazione del problem solving e raccolse i dati mediante un questionario distribuito a 43 insegnanti, nel corso di un seminario di problem solving.
I risultati furono così sintetizzati:
-la risoluzione dei problemi è importante, poiché aiuta a favorire la preparazione cognitiva degli alunni.
-L'insegnamento relativo alla risoluzione dei problemi dovrebbe essere effettuato in modo creativo, flessibile e rassicurante.
-Gli insegnanti dovrebbero coinvolgere gli alunni nella risoluzione dei problemi, permettendo loro di risolverli.
-La prontezza degli alunni nello studio della risoluzione dei problemi è il prerequisito più importante per insegnare a risolvere i problemi.

La ricerca sulle convinzioni degli insegnanti sulla natura dei problemi matematici indica sostanziali variazioni a livello internazionale: Cai e Nie (2007, cit. da Andrews & Xenofontos, 2014, p. 302-; nostra trad.) hanno trovato differenze significative tra insegnanti cinesi e insegnanti americani, derivanti dalle loro esperienze come studenti di matematica. Andrews (2007, cit. in ibid.) intervistò insegnanti ungheresi che descrissero la Matematica come una materia che si basa su una sfida intellettuale intorno ai problemi.

Altri ricercatori hanno identificato differenze sostanziali, culturalmente costruite, nelle convinzioni di insegnanti di scuola primaria pre-servizio a Cipro e in Inghilterra (Xenofontos & Andrews 2012, 2014, cit. da Andrews & Xenofontos, 2014, p. 302; nostra trad.). Arcavi e Friedlander (2007) scrivono:

> «*problems and problem-solving entail a situation for which students have some entrance knowledge or tool…to approach and to solve it, and lack others. Implicit in these views is that the situation presented in the problem is understood and makes sense to students, and that what constitutes a problem at a certain point in time may not necessarily be a problem later on*» .

Tali convinzioni contrastano nettamente con quelle espresse in uno studio di caso di dieci insegnanti di quinto grado negli Stati Uniti, che interpretarono i problemi matematici come applicazione delle abilità di calcolo, enfatizzando i risultati degli studenti che ottenevano la risposta corretta[3] (Ford, 1994).

Le convinzioni degli insegnanti sui problemi e sulla risoluzione dei problemi, quindi, sono legate alle culture di appartenenza e non possono essere, inizialmente, collegate alle opinioni della comunità internazionale di educazione matematica. La realtà della vita in classe, inoltre, ha un effetto moderatore sulle convinzioni degli insegnanti intorno alla risoluzione dei problemi. Per alcuni insegnanti, in particolare per i neo-assunti, tale realtà può compromettere il rafforzamento delle credenze relative al ruolo e al primato del problem solving nelle classi di matematica. Altri insegnanti, per attuare le convinzioni appena acquisite sui problemi e sulla risoluzione dei problemi, abbandonano le pratiche di classe esistenti, magari inadeguate, a favore di pedagogie più aperte (Andrews & Xenofontos, 2014, p. 303; nostra trad.).

Le convinzioni degli insegnanti sul problem solving dunque sono decisamente contestuali, anche perché le culture creano modelli mentali di insegnamento (Strauss et alii, 1998) che informano tipicamente i modi nascosti nei quali gli insegnanti "mettono in scena" le loro convinzioni. (Andrews, 2011, Watson & Barton, 2011). Quando gli insegnanti invitano i loro alunni a risolvere un problema, hanno in genere in mente una loro risoluzione e possono respingere suggerimenti degli allievi che deviano dalle loro aspettative preconcette (Karp, 2010; Leikin, 2003).

Questo problema è causato dal fatto che raramente gli insegnanti si impegnano personalmente nella risoluzione dei problemi, ma anche dalla frequente aspettativa che hanno rispetto al fatto che i problemi si dovrebbero basare su ciò che è scritto nei curricula (Leikin & Levav-Waynberg, 2007).

Per superare tali problematiche può essere efficace una formazione pre-servizio e in servizio che si focalizzi sulla risoluzione di problemi da parte degli insegnanti. Alcuni programmi di formazione per gli insegnanti sono stati costruiti e attuati sul principio che l'immersione nei problemi consenta agli insegnanti di sviluppare sia abilità di problem solving che una migliore capacità di insegnamento (Taplin & Chan,

[3] Da questo punto e fino alla fine del paragrafo, gli Autori e le loro rispettive elaborazioni teoriche sono citate in: Andrews & Xenofontos, 2014, p. 303; nostra trad.

2001). Essi hanno effettivamente permesso agli insegnanti di acquisire le competenze auspicate, indipendentemente dalle loro iniziali competenze matematiche (Guberman & Leikin, 2013). Il processo di risoluzione, che può essere facilitato facendo lavorare gli insegnanti a coppie, fa sì che essi diventino più abili nel risolvere problemi, ascoltatori più attenti dei ragazzi, più propensi anche a coinvolgerli con problemi impegnativi (Karp 2010; Silver et alii, 2005).

Insegnanti in attività di pre-servizio, ai quali è stato dato il tempo di esplorare un problema matematico, sono stati in grado, messi a confronto con un gruppo di altri insegnanti al quale questa esperienza non era stata concessa, di porre ai loro allievi problemi più impegnativi rispetto al ragionamento matematico (Crespo & Sinclair, 2008).

Ciò che unisce tutte queste ricerche è il fatto che più profonda è la conoscenza della matematica da parte degli insegnanti, maggiore è la probabilità di identificare e rispondere alla complessità del problema (Osana et alii, 2006) ma anche di pianificare in modo appropriato domande di stimolo relative all'insegnamento (Leikin & Kawass, 2005).

3.1.1. Il punto di vista di un insegnante principiante sul problem solving

Cooney (1985, pp. 324-336; nostra trad.), dell'Università della Georgia, concentrò il suo studio su un solo insegnante di matematica di scuola superiore, esaminando le sue convinzioni sulla risoluzione dei problemi, mentre stava terminando il suo addestramento pre-servizio e durante i suoi primi tre mesi di insegnamento.

La ricerca di Cooney appare di grande interesse soprattutto per il suo approccio metodologico: sono state rilevate le convinzioni dell' insegnante selezionato attraverso interviste iniziali, che sono state poi seguite da osservazioni in classe, sulla sua pratica didattica. In seguito alle osservazioni della pratica didattica, sono state di nuovo effettuate interviste.

Fred fu intervistato sette volte nel corso dell'inverno e nella primavera del 1982. Durante le interviste furono utilizzate dal ricercatore situazioni ipotetiche, chiamate "episodi", che ebbero lo scopo di sollecitare discussioni approfondite sulla matematica e sull'insegnamento della matematica. Tale scelta fu motivata dalla convinzione che l'insegnante, pur essendo un principiante, potesse avere teorie implicite, se non esplicite, potenzialmente rilevabili grazie a sollecitazioni date con appositi stimoli (Cooney, 1985, p. 326; nostra trad.).

Si riportano due testi di episodi, tra i diciannove utilizzati:

1. Descrivi un aneddoto particolare che durante l'insegnamento agli studenti ha avuto un significato speciale per te.

2. Se potessi essere un'altra persona (o una persona famosa) durante l'insegnamento, chi sceglieresti? Perché?

Ogni colloquio durò circa 45 minuti. L'enfasi continua data da Fred al problem solving spinse il ricercatore ad approfondire l'indagine, utilizzando ulteriori episodi stimolo. Gradualmente si arrivò ad una sesta intervista, nella quale Fred stesso ebbe il compito di classificare, sulla base di categorie a sua scelta, alcune affermazioni ritenute da lui particolarmente importanti (intervista clustering). La tecnica del clustering era una variante del metodo di confronto costante suggerito da Glaser e Strauss (1967, cit. da Cooney, 1985, p. 326; trad. nostra).

Il clustering aiutava ad identificare le dichiarazioni e le convinzioni che Fred riteneva importanti. Le ventotto affermazioni, complete di titoli e descrittori, svolsero un ruolo importante nell'analisi delle sue convinzioni; la soluzione dei problemi appariva come centrale per la visione della matematica e dell'insegnamento della matematica di Fred, e questo diventò dunque l'oggetto delle successive analisi (Cooney, 1987, p. 327; nostra trad.).

Nel novembre dello stesso anno, dopo dieci settimane consecutive di insegnamento di Fred, furono sottoposte ad osservazioni le lezioni del mattino di Fred, per nove giorni consecutivi: si trattava delle lezioni di Algebra e Trigonometria, di Algebra II, di Matematica generale e di Geometria (Cooney, 1985, pp. 327-28; nostra trad.).

Furono poi effettuate sei interviste di richiamo, ciascuna legata alle precedenti osservazioni in classe, più un colloquio generale, a conclusione delle osservazioni.

Le convinzioni espresse durante la formazione pre-servizio da Fred misero in evidenza alcune sue convinzioni: la principale responsabilità dell'insegnante è quella di motivare gli studenti, e per questo è importantissima la pratica del problem solving, che è l'essenza della matematica, la sua attività principale. Fred espresse preoccupazione per i problemi pratici, in quanto potevano essere così specifici da rendere difficile agli studenti la generalizzazione. Era convinto che i problemi potessero rappresentare un'alternativa alle banalità della routine quotidiana che caratterizzava spesso la vita scolastica dello studente e metteva in rilievo il piacere derivante dal lavorare sui problemi ricreativi e il loro potenziale di motivare gli studenti. Manifestò il proprio rammarico per il fatto che gli studenti non si rendessero conto di quanto la matematica potesse essere divertente (Cooney, 1985, p. 329; nostra trad.).

Le osservazioni nella classe di Fred rivelarono uno stile di insegnamento sciolto, punteggiato da leggerezza, come si poteva evincere dall'uso che faceva di giochi di parole come: «Il triangolo dalla testa grossa si chiama ottuso». Aveva un modo tipico di insegnare e il suo aspetto, i suoi modi, il contegno generale erano casuali; dava l'impressione che a lui la matematica piacesse e che si aspettasse che anche gli studenti potessero godere del suo studio.

Non in tutte le classi, però, i suoi studenti sembravano rispondere al suo stile di insegnamento: nella classe di Matematica c'erano studenti veramente distruttivi, sebbene Fred raramente reagisse alle interruzioni. I suoi piani di lezione, durante il tempo delle visite, consistevano in un breve elenco di contenuti da rivedere, esempi da presentare e compiti per il giorno successivo. Il libro di testo era il fattore determinante nell'impostazione del suo lavoro e del suo metodo di presentazione (Cooney, 1985 p. 330; nostra trad.).

Fred espresse la propria frustrazione, lamentandosi di avere poco tempo e dichiarando che era molto più facile insegnare utilizzando il libro e lasciando l'euristica fuori dell'aula; considerava i problemi dei libri di testo degli esercizi di routine mascherati; eppure le esigenze dell' insegnamento ostacolavano la sua capacità di creare problemi reali; i problemi che lui proponeva sembravano viaggiare "sopra le teste" degli studenti e sembravano essere poco interessanti per molti di loro. Quindi, nonostante fosse convinto dell'utilità dei suoi problemi di matematica ricreativa, dovette riscontrare che in aula non era riuscito a motivare gli studenti (ibid.).

Fred si rese conto che il mezzo con cui aveva deciso di insegnare matematica era in conflitto con le aspettative di molti studenti, in particolare di quelli meno capaci. Sebbene avesse avuto successo con una delle classi, quella più avanzata, questo successo era stato messo in ombra, nella sua mente, dal percepito fallimento di non essere riuscito a motivare gli studenti che non ritenevano i giochi e gli enigmi matematici dei veri e propri compiti.

Il dilemma di Fred molto derivava dal suo stile di insegnamento monolitico, carente rispetto agli strumenti che sarebbero invece stati utili per comprendere ed accogliere una vasta gamma di studenti. La sua visione del problem solving, inoltre, era limitata ai problemi extracurriculari. Tale convinzione lo distanziava da una visione che potesse integrare il problem solving con i curricula scolastici.

In questa prima fase del suo sviluppo professionale Fred sembrava prevedere due soli stili di insegnamento: un approccio altamente autoritario e un approccio per problemi; era lontana l'idea che un insegnante potesse essere un leader di classe forte e contemporaneamente potesse lavorare per problemi.

In conclusione, l'insegnamento del problem solving è, secondo Cooney uno degli argomenti che merita l'attenzione della ricerca, se si vuole fornire ai docenti un sostegno profondo e consapevole, oltre ogni retorica.

3.1.2. Le concezioni degli insegnanti di scuola primaria sul problem solving

In conformità con il curriculum[4], in Finlandia si considera molto importante migliorare le capacità di problem solving degli alunni. Poiché il ruolo dei docenti è cruciale per la realizzazione del curriculum, considerando che le loro idee influenzano le decisioni che essi prendono, sia quando preparano le loro lezioni che quando insegnano matematica. Pehkonen (2017, p. 18; nostra trad.) si è proposto di studiare le convinzioni degli insegnanti elementari finlandesi in materia di problem solving e del suo insegnamento.

Durante le primavere 2006 e 2007, ai 103 insegnanti in servizio della città di Kerava[5] (gradi 1-6) venne consegnato un questionario, che fu però compilato e restituito solo da 42 di loro (ibid.).

Tale questionario conteneva sei domande aperte, oltre alle domande standard mirate ad acquisire i dati anagrafici e altre informazioni riguardanti sesso, età, qualifica, specializzazione in matematica ed esperienza di insegnamento. Le domande aperte erano le seguenti:

[4] Il nuovo curriculum nazionale di base per l'istruzione di base è stato introdotto per i gradi 1-6 in tutte le scuole a partire dal 1 ° agosto 2016. Il curriculum sarà introdotto per i gradi superiori dell'istruzione di base in fasi: il nuovo curriculum sarà adattato per gradi 7 su 1 Agosto 2017, per gradi 8 nel 2018 e per gradi 9 nel 2019. L'Agenzia nazionale finlandese per l'istruzione ha introdotto il curriculum nazionale principale per l'istruzione di base nel 2014. I fornitori di servizi educativi hanno elaborato i propri programmi di studio locali basati sul curricolo nazionale principale.

[5] Kerava è una piccola città del sud della Finlandia a circa 30 Km a nord di Helsinki.

1. «Che cosa significa per te risolvere i problemi, nell'insegnamento della matematica?».
2. «Come dovrebbe essere risolto il problem solving in matematica?».
3. «Come vedi il problem solving nel tuo insegnamento della matematica?».
4. «Che tipo di strutture utilizzi per insegnare la risoluzione dei problemi in matematica?».
5. «Che tipo di ostacoli incontri quando insegni a risolvere i problemi in matematica?».

Per analizzare il materiale della ricerca fu utilizzata l'analisi del contenuto. Le risposte degli insegnanti, le loro idee sul problem solving e sulla pratica didattica ad esso relativa furono classificate sulla base delle seguenti categorie:

1. il significato del curriculum;
2. il significato dei materiali didattici;
3. l'insegnamento delle capacità di problem solving (Pehkonen, 2017, p. 19; nostra trad.).

Nel curriculum finlandese l'enfasi è sulla padronanza dei calcoli e sui concetti matematici. L'insegnamento delle capacità di problem solving è totalmente abbandonato in favore dei contenuti chiave della matematica, prima del 6° livello nella scuola globale (ibid.).

Analizzando il contenuto delle interviste, si evidenziò che ci sono troppi argomenti e poco tempo; non c'è tempo sufficiente per potersi dedicare alla risoluzione dei problem;.c'è fretta di insegnare i troppi argomenti di base; i soggetti meno abbienti hanno bisogno di tempo e di supporto sugli argomenti di base. Per argomenti gli insegnanti intendevano gli obiettivi che sono scritti nel curriculum e che sono denominati "argomenti chiave".

Gli insegnanti dichiararono di integrare il lavoro sui problemi con compiti aggiuntivi di problem solving, specialmente nel caso di alunni motivati e di talento; espressero la convinzione che la risoluzione dei problemi implicasse l'applicazione di conoscenze e abilità precedentemente acquisite. Riconobbero l'importanza del problem solving, ma la non adeguatezza da parte degli insgenanti di implementare un insegnamento che corrispondesse alle loro convinzioni, a causa della pressione esterna esercitata dal curriculum e dal contesto sociale di cui tale curriculum era l'espressione (Pehkonen, 2017, p. 20; nostra trad.).

Dal punto di vista degli insegnanti, inoltre, i compiti di problem solving richiedevano agli alunni pensiero creativo, indipendente, ragionamento e applicazione (Pehkonen, 2017, p. 21; nostra trad.); potevano essere espressi in forma verbale o visiva, avrebbero dovuto essere nuovi per gli alunni e legati a situazioni pratiche quotidiane. I materiali didattici di matematica contenevano pochi contenuti per insegnare a risolvere i problemi; tuttavia erano molto usati dagli insegnanti, insieme alle guide didattiche (ibid.).

Rispetto all'insegnamento delle capacità di problem solving, un insegnante avrebbe dovuto: studiare le strategie con le quali il risolutore avrebbe potuto risolvere nuovi tipi di compiti, cioè i problemi; lasciare che l'alunno selezionasse da sé quale strategia usare, anche se non sempre c'è una formula pronta che si possa insegnare e che l'allievo possa usare.

Un insegnante, inoltre, avrebbe dovuto modellare e insegnare, passo dopo passo, il pensiero in fasi o insegnare strategie di pensiero, illustrate con diversi modelli oppure ponendosi come leader che illustra, fornisce esempi, apre problemi, spiega il proprio pensiero durante il processo di soluzione, fornisce le informazioni sulle relazioni causa effetto e su diverse strategie di problem solving; alcune strategie permettono l'avanzamento passo dopo passo nella suddivisione del problema in sottoproblemi (Pehkonen, 2017, p. 22; nostra trad.).

Risolvere problemi fu associato dagli insegnanti finlandesi a problemi di vario tipo, a strategie, alla matematica nelle situazioni quotidiane, al pensiero degli studenti, all'applicazione di abilità precedentemente apprese.

Rispetto all'insegnamento, fu sottolineata l'importanza degli approcci concreti e pratici, e anche dell'uso del materiale didattico. Si sottolineò che mancava comunque il tempo per realizzare attività di risoluzione di problemi.

I curricula, i materiali didattici e gli insegnanti enfatizzavano le abilità di calcolo degli studenti più che le loro capacità di problem solving e sembravano tenere separate le due tipologie di compito (Pehkonen, 2017, p. 23; nostra trad.).

Gli insegnanti misero in rilievo anche la debolezza delle loro capacità, soprattutto nel momento in cui dovevano dare consigli corretti agli alunni oppure quando si trattava di riuscire a guidare un alunno in modo tale che fosse comunque lui stesso a risolvere il problema. Era stato utile, per alcuni insegnanti, provare interesse ed avere esperienza nella risoluzione di problemi, perché tali elementi li avevano aiutati a cercare e a trovare i propri metodi di insegnamento e i materiali adeguati (ibid.).

Kush e Ball (1986, cit da Pehkonen, 2017, pp. 23 - 24; nostra trad.) avevano classificato le convinzioni dei docenti, dividendoli in due gruppi: le convinzioni di coloro che enfatizzano la comprensione e quelle di coloro che enfatizzano la capacità di calcolo. Rispetto allo studio da lui presentato, Pehkonen afferma che solo due insegnanti mostrarono di essere interessati alla risoluzione dei problemi come processo.

Fu espresso il bisogno, da parte di alcuni insegnanti, di un'istruzione in servizio rispetto all'insegnamento della risoluzione dei problemi ed enfatizzata l'esigenza di essere istruiti a insegnare la soluzione dei problemi.

Concludendo, le convinzioni dei docenti sulla risoluzione dei problemi fanno parte di una totalità più ampia che include le convinzioni degli insegnanti sulla natura della matematica e quelle sul suo insegnamento e apprendimento (Pehkonen, 2017, p. 24; nostra trad.).

Il cambiamento delle convinzioni sulla risoluzione dei problemi è un processo ampio che richiede il coinvolgimento del pensiero riflessivo di un insegnante (Thompson, 1984, cit. da Pehkonen, 2017, p. 24).

Nonostante lo sviluppo dell'insegnamento dei problemi in Finlandia non sia stato rapido, ci sono tuttavia alcuni cambiamenti da osservare (Pehkonen, Hannula, & Björkqvist, 2007, cit. da Phekonen, 2017, p. 24). Nelle lezioni attuali di Matematica finlandesi è diffuso l'uso di compiti di problem solving, soprattutto proposti nella forma di enigmi matematici. In ogni caso, solo pochissimi insegnanti stanno usando il problem solving come metodo; la maggior parte insegna qualcosa sui problemi: inserisce alcuni compiti o enigmi (Phekonen, 2017, p. 25; nostra trad.), non modificando sostanzialmente il proprio modo di fare matematica.

3.1.3 Uno studio delle relazioni tra convinzioni sul problem solving, competenze e insegnamento

Andrews e Xenofontos (2014, p. 299; nostra trad.) studiarono le convinzioni di tre insegnanti ciprioti della primaria sui problemi e sulla loro risoluzione, ma anche la loro competenza come risolutori di problemi matematici e l'insegnamento relativo.

Tale studio aveva non solo l'obiettivo di esaminare le interazioni tra convinzioni, competenze e pratica degli insegnanti, relativamente alla risoluzione dei problemi, ma anche quello di mettere a punto un kit di strumenti appropriato per questa tipologia di studi.

Gli autori ritennero che il loro specifico oggetto di ricerca potesse essere meglio affrontato con uno studio di caso multiplo (ibid.).

Fu utilizzato un quadro teorico che teneva conto sia delle ricerche di Schoenfeld, negli Stati Uniti, che delle ricerche di De Corte, Verschaffel ed altri, nelle Fiandre. Il primo Autore aveva riflettuto sulle conoscenze di base del risolutore: su che cosa conosce già e su che cosa è utile per risolvere un problema, su come organizza queste conoscenze e come accede ad esse in modo mirato (Schoenfeld 1992, 2004, cit. da Andrews & Xenofontos, 2014, p. 306; nostra trad.).

La risoluzione dei problemi richiede una conoscenza ben organizzata e flessibile, comprese le regole che sono alla base dell'argomentazione matematica (De Corte 1995, De Corte 2004, De Corte et alii, 2000, cit. in ibid.). Si deve essere in possesso di un insieme produttivo di strategie di problem solving (Schoenfeld 1992, 2004, cit. da Andrews e Xenofontos, 2014, p. 307; nostra trad.) o euristica (Schoenfeld 1985b cit. in ibid.) a cui il soggetto può avere accesso per la risoluzione dei problemi; tali strategie ed euristiche non garantiscono la soluzione di un problema, ma aumentano significativamente la probabilità di trovare un'argomentazione utile alla risoluzione di esso (De Corte 1995, 2004; De Corte et alii, 2008, cit. in ibid.).

Occorre saper usare efficacemente le conoscenze, le abilità e la capacità di selezionare e sfruttare consapevolmente strategie e risorse; bisogna possedere, quindi, competenze metacognitive per controllare il proprio processo decisionale. De Corte et alii avevano sostenuto il concetto di "metaconoscenza", che abbracciava sia la "metacognizione" che la "metavolontà" e avevano chiarito anche che la motivazione e gli affetti legati alla matematica influenzano l'impegno nella risoluzione dei problemi (De Corte, 1995, 2004; De Corte et alii, 2000; Verschaffel et alii, 2009 cit. da Andrews & Xenofontos, 2014, p. 307; nostra trad.).

I tre insegnanti di matematica che parteciparono alla ricerca di Andrews e Xenofontos (2014, p. 304) lavoravano con alunni di età compresa tra 11 e 12 anni, in diverse scuole urbane di una città di provincia a Cipro. Tutti e tre gli insegnanti furono sottoposti a singole interviste semistrutturate che miravano ad acquisire le loro convinzioni sulla matematica, sulla risoluzione dei problemi e sul loro insegnamento. I temi dell'intervista furono strutturati intorno a quattro grandi temi della letteratura:

-convinzione su sé stessi come insegnanti di matematica;

-convinzioni sulla natura del problema e la risoluzione dei problemi;

-convinzioni su sé stessi come risolutori di problemi;
-convinzioni sulla gestione del problem solving nelle aule.

Ogni intervista durò mezz'ora circa, fu registrata con audio, trascritta ed analizzata in base alle quattro tematiche individuate. Successivamente i partecipanti presero parte a un colloquio clinico incentrato sulla risoluzione di un problema matematico, secondo la modalità del pensare ad alta voce; anche questo colloquio fu audio-registrato, al fine di acquisire più elementi possibili del processo risolutivo dei docenti.

Per ciascun insegnante fu effettuata un'analisi rispetto alle seguenti dimensioni: conoscenza, euristica, meta-conoscenza, convinzioni, problematizzazione, autorità, discipline, risorse (Andrews & Xenofontos, 2014, p. 308; nostra trad.).

A conclusione della ricerca, gli Autori affermarono che entrambi gli approcci teorici utilizzati si erano rivelati utili: avevano consentito infatti di costruire uno strumento che aveva permesso di acquisire narrazioni dettagliate per ciascun insegnante; in ciascun trascritto era evidente la complessa attività di relazione tra il modo in cui gli insegnanti pensavano e quello in cui agivano (Cohen 1990; Skott 2009, 2013; Wilkins 2008, cit. da Andrews e Xenofontos 2014, p. 319; nostra trad.).

Emersero somiglianze sostanziali rispetto alle convinzioni sui problemi, nelle procedure di soluzione e nelle pratiche di insegnamento, e ciò sembrò essere esemplificativo di una chiara prospettiva cipriota sull' educazione matematica in generale e sul problem solving in particolare.

Tutti e tre gli insegnanti lavoravano con un curriculum centralizzato che privilegiava il problem solving matematico (Campbell, Kyriakides 2000) ma che promuoveva, attraverso i libri di testo, una prospettiva particolare sulla natura dei problemi e sul problem solving, in cui il problema era sinonimo di problema aritmetico (Kyriakides et alii, 2006, cit. da Andrews e Xenofontos 2014, pp. 319-320; nostra trad.).

Tutti i problemi rientravano in categorie ben definite, ciascuna delle quali si metteva in moto un particolare processo di soluzione che gli allievi avrebbero dovuto padroneggiare (Charalambous & Philippou, 2010, cit. da Andrews e Xenofontos 2014, p. 320; nostra trad.).

Tutti e tre gli insegnanti presentarono un problema ai loro studenti in modo chiaro e non ambiguo su moduli scritti, su carta e/o sulla lavagna. Tuttavia, quando si passò alla discussione sulla soluzione dei problemi, nessuno degli insegnanti menzionò categorizzazioni di problemi o schemi di strategie di soluzione.

Andrews e Xenofontos (2014, p. 312; nostra trad.) trovarono differenze significative tra i tre insegnanti partecipanti alla ricerca; si riportano, di seguito, le analisi effettuate:

Anna considera il problema matematico una situazione che richiede agli alunni di scoprire quali siano le informazioni fornite, di ordinare i punti dati, di trovare cosa il problema ti chiede di fare e poi di risolverlo. Le informazioni contenute nel problema a suo giudizio dovrebbero essere chiare e precise, in modo tale che gli allievi capiscano cosa deve essere fatto. Gli allievi dovrebbero avere non più di tre o cinque minuti di tempo per risolverlo; il fatto che abbia trascorso molti minuti a lavorare sul compito, evidenzia una sua contraddizione rispetto alla convinzione che i problemi matematici richiedono pochi minuti per essere risolti.

Per Anna insegnare la matematica attraverso la soluzione dei problemi è possibile solo se i bambini conoscono soluzioni matematiche appropriate; se gli allievi non conoscono procedure matematiche idonee e non sanno risolvere gli esercizi procedurali, rimarranno, secondo le sue convinzioni, molto delusi e non saranno motivati a risolvere i compiti più difficili.

I suoi allievi appaiono nervosi quando devono risolvere problemi e solo pochi raggiungono la soluzione, mentre i restanti abbandonano rapidamente ogni sforzo, credendo che non serva provare, in quanto l'insegnante spiegherà la soluzione alla lavagna.

Anna non ha "sposato" la convinzione dell'autonomia dell'allievo, ma la sua convinzione è che il suo ruolo di insegnante sia quello di strutturare l'apprendimento degli allievi. Le convinzioni e le azioni di Anna sono coerenti con la sua visione di insegnante intesa come autorità disciplinare; tale prospettiva è supportata dal suo frequente rinvio ad altri durante il suo colloquio clinico. (Andrews & Xenofontos, 2014, p. 314; nostra trad.).

Elena ha avuto molto da dire sui problemi e sulla risoluzione dei problemi. Per lei un problema matematico è una situazione che richiede una soluzione; può assumere molte forme e, immaginandolo lungo una scala di difficoltà, può essere da molto semplice a molto complicato.

Un problema matematico comprende una parte verbale e una parte numerica; quest'ultima è inclusa nel verbale in forma di numeri e simboli. Lei crede che il viaggio che porta alla soluzione del problema sia molto più importante della soluzione stessa e che questo viaggio, legato al pensiero critico, sia più di una procedura. Il risolutore deve trovare un modo che porta alla soluzione, e solo allora ha veramente compreso il problema e può spiegarlo agli altri. Vede l'insegnamento attraverso il problem solving non solo come un modo per collegare un concetto matematico con situazioni quotidiana, ma anche come un modo per introdurre nuovi concetti.

Ritiene che i parametri temporali stabiliti dal programma della scuola non consentano molto tempo per le attività di risoluzione dei problemi, nonostante che i libri di testo nazionali presentino molte attività di problem solving. Eleni dichiara di non spendere molto tempo sui problemi, se non sono legati al particolare concetto matematico che vuole trasmettere.

Durante la sua intervista, Eleni sostiene che la matematica e i problemi matematici la rendono nervosa, ma se dovesse davvero risolvere un problema, proverebbe e userebbe ogni mezzo possibile, perché è una persona testarda e orgogliosa. Se dovesse incontrare delle difficoltà, chiederebbe aiuto a una persona più esperta o metterebbe via il problema, per poi riprenderlo dopo essersi rilassata.
La maggior parte dei suoi studenti non è entusiasta perché non amano risolvere i problemi, a causa dell'insicurezza che provano, derivante da esperienze negative di lezioni di matematica avute nel corso degli anni precedenti (Andrews & Xenofontos, 2014, p. 315; nostra trad.).

Durante la sua lezione, dopo aver verificato che il compito presentato sulla carta sia stato compreso, chiede agli studenti di annotare qualsiasi informazione che sia utile ad escogitare un piano di soluzione. Ogni studente, come per ogni problema, deve scrivere i passi successivi del processo risolutivo. In questo processo di scrittura di una soluzione, si possono intravedere i germi di un cambiamento di "autorità". Questi piani sono sottoposti a controllo "pubblico" e la soluzione è respinta se giudicata inappropriata.

In altre parole, Eleni mantiene il controllo sulle indicazioni che gli studenti possono prendere e solo quelle che si adattano alla sua esperienza del problema sono incoraggiati. Questi dati, dunque, non danno molto prova di uno spostamento dell'autorità matematica, da Eleni ai suoi studenti. Tuttavia, le sue azioni come risolutrice di un problema, e il modo in cui gestisce la lezione, indicano una profonda comprensione del compito di matematica e il desiderio di assicurare che i suoi studenti siano coinvolti in una comprensione simile. In altre parole, anche se è riluttante a consegnare l'autorità agli allievi, è entusiasta di offrire loro l'opportunità di impegnarsi in modo significativo su un problema. La mutevole fiducia di Eleni comporta un comportamento normativo incoerente.

Stelios ha opinioni molto forti e chiare sulla natura dei problemi matematici, che descrive come situazioni che portano il risolutore in un'avventura mentale paragonabile a un viaggio (Andrews e Xenofontos, 2014, p. 318; nostra trad.). Il valore del problema sta nello sforzo impiegato e non nei risultati conseguiti; gli errori procedurali diventano irrilevanti in quanto l'enfasi è sui processi mentali, messi in atto per condurli alla soluzione. In relazione all'apprendimento degli studenti di matematica, Stelios aggiunge che il tempo dedicato ad un problema dovrebbe essere legato alle difficoltà del problema e alla competenza degli studenti.

Gli insegnanti dovrebbero evitare di sostenere che il più veloce risolutore di problemi vinca. Un problema dovrebbe essere posto con chiarezza, per non far confondere gli allievi e non condurre a equivoci; i problemi reali potenzialmente hanno molti percorsi che conducono alla soluzione e richiedono sia l'esame metodico che la manipolazione di informazioni fornite.

Il comportamento tenuto nel corso dell'intervista clinica conferma le convinzioni di Stelios: il problema è come un'avventura che coinvolge i processi mentali. Stelios annuncia all'inizio che per risolvere il problema gli allievi possono utilizzare l'intera lezione. Distribuisce un foglio di lavoro e chiede agli studenti di scrivere le idee che hanno per risolverlo. Tale comportamento è indicatore di un paio di convinzioni: un problema che dura tutta la lezione è un problema che richiama l'idea del viaggio; il foglio di lavoro rivela l'importanza che ci sia una presentazione chiara del problema.

Stelios crede che i bambini imparino la matematica per gestire la loro vita quotidiana e per sviluppare un modo di pensare più organizzato. Secondo lui il programma di insegnamento permette poche opportunità di risoluzione dei problemi, costringendo gli insegnanti a rinunciare alle attività che richiedono tempo, come la risoluzione dei problemi. Tali affermazioni manifestano un desiderio di passare l'autorità da sé stesso allo studente.

Quando gli studenti incontrano difficoltà, dà suggerimenti, che crede li possano aiutare a trovare il proprio percorso verso la soluzione. Quando tali difficoltà sono comuni a diversi studenti, offre un feedback di gruppo. La lezione mostra il tentativo di preparare gli studenti ad assumere autorità nei confronti della risoluzione del problema. Si può sostenere che il compito sia così ben definito da rendere difficile agli allievi di poter esercitare la loro autorità sui problemi (ibid.).

Mettendo a confronto i tre docenti, le convinzioni e le pratiche di Anna sembrano essere coerenti e legate a convinzioni radicate, che concepiscono i problemi come delle routine e dei compiti ai quali dedicare tempo limitato per la loro risoluzione; l'insegnante è l'unico arbitro di ciò che deve essere sancito come un appropriato comportamento in classe da parte degli allievi.

Anna lavora duramente per garantire che i suoi alunni siano adeguatamente preparati in qualunque compito essi si accingono a fare. Tali convinzioni, così come le pratiche, sono essenzialmente indipendenti dalla sua competenza.

A differenza di Anna, i colleghi Eleni e Stelios hanno descritto il problem-solving come un viaggio in cui il processo è più importante del risultato. Rispetto alla conoscenza personale della matematica, necessaria per risolvere il problema, tutti e tre gli insegnanti mostrano di essere "attrezzati" matematicamente, ma il fatto che tali conoscenze siano sfruttate o meno è legato alla fiducia che ognuno ha di sé.

Le principali differenze si possono riscontrare nei modi in cui le conoscenze sono messe in campo: Anna sembra fare molto riferimento alle conoscenze pregresse, mossa dalla convinzione che gli allievi non riescano a risolvere i problemi in autonomia; Eleni e Stelios, invece, non sentono lo stesso bisogno, considerando gli allievi preparati dal precedente processo di apprendimento (ibid.).

Effettuando un commento finale, si può dire che il framework sviluppato per questo studio abbia permesso agli autori citati di effettuare un'analisi approfondita di tre "casi" di insegnanti primari ciprioti, relativamente alle loro convinzioni sui problemi e alle loro pratiche, permettendo di identificare regolarità e irregolarità, e di delineare, anche se in modo provvisorio, una descrizione esauriente di ciascuno di loro.

Capitolo quarto

Le sfide nazionali e internazionali

4.1. L'avvenire dell'insegnamento della matematica nella scuola di base per l'UNESCO

L'UNESCO ha nominato nel 2009 un gruppo di esperti che rappresentavano varie competenze collegate all'insegnamento della matematica, delle scienze e della tecnologia, alla formazione degli insegnanti, alla psicologia cognitiva. Il documento sulla matematica fu preparato da Michèle Artigue, allora presidente dell'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), commissione dell'International Mathematical Union (IMU).

Si tratta di un documento di notevole valore, che traduce i risultati di molti decenni di ricerca sul tema, in una serie di raccomandazioni per la politica educativa dei diversi paesi. (Bartolini Bussi, 2011).

Citiamo alcuni passi di tale documento:

« […] Oggi, la literacy matematica deve, in particolare, permettere agli individui di comprendere, analizzare, criticare molteplici dati, la cui presentazione coinvolge sistemi di rappresentazione diversi e complessi, numerici, simbolici e grafici, spesso in interazione. Essa deve permettere loro di fare delle scelte ragionevoli, basandosi sulla comprensione, la modellizzazione, la predizione, e di controllare i loro effetti, in situazioni inattese e spesso caratterizzate da incertezza […]. Oggigiorno c'è consenso nel ritenere che ciò che ci si attende, sono anzitutto delle conoscenze operative che si esprimono nella capacità di mobilitare strumenti matematici per far fronte a situazioni nuove e potenzialmente problematiche, e non solo la capacità di riprodurre delle procedure apprese in contesti molto vicini a quello del contesto di apprendimento […]. Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) definiscono ciò che chiamano "mathematical profiency" come il risultato dell'intreccio di cinque dimensioni: conceptual understanding, procedural fluency, strategie competence, adaptive reasoning and productive disposition"»(Artigue, 2011, p. 226).

Gli studi delle pratiche degli insegnanti mostrano che l'insegnamento della matematica nella scolarità di base è troppo spesso ancora un insegnamento poco stimolante, ed è:

«concepito come un insegnamento formale, incentrato sull'apprendimento di tecniche e sulla memorizzazione di regole la cui ragion d'essere non s'impone agli allievi; gli oggetti matematici sono introdotti senza che si sappia a quali bisogni rispondano, né come si articolino con quelli preesistenti; i legami con il mondo reale sono deboli, generalmente troppo artificiosi per essere convincenti, e le applicazioni stereotipate; le pratiche sperimentali, le attività di modellizzazione sono rare e un utilizzo pertinente della tecnologia resta ancora relativamente raro; gli allievi hanno poca autonomia nel loro lavoro matematico e sono molto spesso relegati a compiti di riproduzione» (Artigue, 2011, p. 229).

Nel tempo ricerche e sperimentazioni hanno mostrato che altre alternative sono possibili e produttive in termini di apprendimento. Tali ricerche si fondano su proposte socio-costruttiviste dell'apprendimento (Ernest, 2007, cit. da Artigue, 2009, p. 229); mettono l'accento sullo spazio da accordare alla risoluzione dei problemi nell'insegnamento della matematica, sia nel caso in cui tali problemi siano utilizzati per motivare e preparare l'introduzione di nuove nozioni, sia nel caso in cui essi permettano di manipolare e sfruttare tali nozioni dopo che esse sono state introdotte. (Artigue, 2009, p. 229).

Numerosi studi mostrano, tuttavia, che anche quando gli insegnanti seguono l'approccio socio-costruttivista e propongono agli allievi dei problemi più aperti, che si suppone possano indurre in essi un atteggiamento di ricerca, i risultati non sempre sono soddisfacenti. Spesso si osserva che un'attività degli allievi, anche quando è ben orientata e ragionevolmente produttiva sul piano matematico, difficilmente è sfruttata dall'insegnante, se quest'ultimo non è stato specificamente formato a ciò.

La condivisione delle responsabilità matematiche tra insegnante e allievi, che sottende a questa visione dell'apprendimento, è in effetti lontana dall'essere scontata (Artigue, 2009, p. 230). Essa richiede che gli insegnanti siano capaci di far fronte all'imprevisto e sappiano identificare il potenziale matematico delle idee e delle produzioni degli allievi, non necessariamente previste. Richiede, infine, che gli insegnanti siano capaci di aiutare gli allievi a collegare i risultati che hanno ottenuto in un contesto particolare con le conoscenze attese dall'istituzione, al tempo stesso nel loro contenuto e nella forma di espressione (ibid.).

La perizia richiesta agli insegnanti va, in tal modo, ben oltre ciò che è in gioco nelle pratiche di insegnamento tradizionali […]. Una formazione adeguata dovrebbe aiutare gli insegnanti a sostenere il loro ruolo di guida e di mediazione per gestire queste attività in modo adeguatamente efficace (Artigue, 2011, p. 231).

Per raccogliere le sfide di un'educazione matematica di qualità è importante sviluppare conoscenze nuove attraverso la ricerca. In questo senso, non è solo il modello socio-costruttivista ad ispirare oggi molte innovazioni e azioni educative, ma ci sono altri studi, come lo studio ICMI che riguarda il confronto tra le culture di insegnamento nei paesi dell'Asia di tradizione confuciana e quelle dei paesi occidentali (Leung, Graf & Lopez-Real, 2006, cit. da Artigue, 2009, p. 231); The Learner's Perspective Study (Clarke, Keitel & Shimizi, 2006, cit. da Artigue, 2009, p. 231); (Clarke, Emanuelsson, Jablonca & Chee Mok, 2006, cit. da Artigie, 2009, p. 231), che confrontano le pratiche di insegnanti riconosciuti come esperti in dodici paesi.

La constatazione che la ricerca abbia spostato il suo focus sugli insegnanti non è senza significato: è evidente che attivare forme nuove di apprendimento chiama in causa competenze professionali che l'iter di formazione del docente oggi non comprende. Le considerazioni sviluppate in questo capitolo rimandano tutte al nodo del percorso formativo del docente, palesemente inadeguato alle nuove istanze di apprendimento.

La ricerca in educazione più recentemente si è interessata all'insegnante, alle sue convinzioni e alle sue credenze circa la matematica e il suo insegnamento, alle sue conoscenze e competenze, al modo in cui esse si sviluppano […] (Artigue, 2009, pp. 252-253).

4.2. Il quadro delle nuove competenze chiave europee

Il Consiglio dell'Unione Europea, lo scorso 23 maggio 2018, ha pubblicato le "Nuove competenze chiave per l'apprendimento permanente". Sono trascorsi dodici anni dalla Raccomandazione del 2006, e anche le competenze richieste sono state meglio messe a fuoco (l'unica rimasta identica è la competenza digitale) (Di Donato, 2018).

Le competenze sono definite come una combinazione di conoscenze, abilità e atteggiamenti […]. Le competenze chiave sono quelle di cui tutti hanno bisogno per la realizzazione e lo sviluppo personali, l'occupabilità, l'inclusione sociale, uno stile di vita sostenibile, una vita fruttuosa in società pacifiche, una gestione della vita attenta alla salute e alla cittadinanza attiva.

Esse si sviluppano in una prospettiva di apprendimento permanente, dalla prima infanzia a tutta la vita adulta, mediante l'apprendimento formale, non formale e informale in tutti i contesti, compresi la famiglia, la scuola, il luogo di lavoro, il vicinato e altre comunità; sono considerate tutte di pari importanza e ognuna di esse contribuisce a una vita fruttuosa nella società.

Le competenze possono essere applicate in molti contesti differenti e in combinazioni diverse. Esse si sovrappongono e sono interconnesse; gli aspetti essenziali per un determinato ambito favoriscono le competenze in un altro. Elementi quali il pensiero critico, la risoluzione dei problemi, il lavoro di squadra, le abilità comunicative e negoziali, le abilità analitiche, la creatività e le abilità interculturali sottendono a tutte le competenze chiave. Il quadro di riferimento delinea otto tipi di competenze chiave:

- competenza alfabetica funzionale;
- competenza multilinguistica;
- competenza matematica e competenza in scienze, tecnologia e ingegneria;
- competenza digitale;
- competenza personale, sociale e capacità di imparare a imparare;
- competenza in materia di cittadinanza;
- competenza imprenditoriale;
- competenza in materia di consapevolezza ed espressione culturali.

Si riporta, di seguito, la descrizione solo di alcune competenze a cui faremo riferimento, in modo particolare nel capitolo dell'analisi dei dati: la competenza matematica; la competenza personale, sociale e capacità di imparare a imparare; la competenza imprenditoriale.

«La competenza matematica è la capacità di sviluppare e applicare il pensiero e la comprensione matematici per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza della competenza aritmetico-matematica, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che sulla conoscenza. La competenza matematica comporta, a differenti livelli, la capacità di usare modelli matematici di pensiero e di presentazione (formule. modelli, costrutti, grafici. diagrammi) e la disponibilità a farlo. […].
La competenza personale, sociale e la capacità di imparare a imparare consiste nella capacità di riflettere su sé stessi, di gestire efficacemente il tempo e le in formazioni, di lavorare con gli altri in maniera costruttiva, di mantenersi resilienti e di gestire il proprio apprendimento e la propria carriera. Comprende la

capacità di far fronte all'incertezza e alla complessità, di imparare a imparare, di favorire il proprio benessere emotivo e emotivo, di mantenere la salute fisica e mentale, nonché di essere in grado di condurre una vita attenta alla salute e orientata al futuro, di empatizzare e gestire il conflitto in un contesto favorevole e inclusivo. […].
La competenza imprenditoriale si riferisce alla capacità di agire sulla base di idee e opportunità e di trasformarle in valori per gli altri. Si fonda sulla creatività, sul pensiero critico e sulla risoluzione di problemi, sull'iniziativa e sulla perseveranza, nonché sulla capacità di lavorare in modalità collaborativa al fine di programmare e gestire progetti che hanno un valore culturale, sociale o finanziario. […] Le capacità imprenditoriali si fondano sulla creatività, che comprende immaginazione, pensiero strategico e risoluzione di problemi, nonché riflessione critica e costruttiva in un contesto di innovazione e di processi creativi in evoluzione. Comprendono la capacità di lavorare sia individualmente sia in modalità collaborativa in gruppo, di mobilitare risorse […]. È essenziale la capacità di comunicare e negoziare efficacemente con gli altri e di saper gestire l'incertezza, l'ambiguità e il rischio in quanto fattori rientranti nell'assunzione di decisioni informate […]».

Elemento di novità è che la competenza imprenditoriale si riferisce alla capacità di agire, con creatività, sulla base di idee e opportunità e di trasformarle in valori per gli altri. Anche qui, come specchio dei tempi, entrano in gioco le capacità di sapere gestire l'incertezza, l'ambiguità e il rischio, in quanto rientranti nell'assunzione di decisioni informate (Di Donato, 2018).

Ciò che attraversa trasversalmente le competenze di questa raccomandazione è una grande attenzione agli atteggiamenti da sviluppare durante il processo di insegnamento/apprendimento (attitudini o disposizioni della mente), che sono parte integrante del possesso e sviluppo di una competenza: perseveranza, empatia, apertura al nuovo (ibid.) [6]

[6] L'analisi del nuovo testo delle Competenze chiave per l'apprendimento permanente è di Daniela Di Donato; il suo articolo è reperibile nel sito: https://www.agendadigitale.eu/cultura-digitale/competenze-digitale

4.3. Le competenze matematiche nelle valutazioni internazionali

L'indagine valutativa che ha il maggior impatto sui *media* di tutto il mondo è sicuramente la ricerca PISA (Program for International Student Assessment) promossa dall'OCSE (Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico). L'OCSE (o OECD) è un'organizzazione internazionale con sede a Parigi, che non è nuova a interventi in campo educativo e in particolare in educazione matematica. (Bolondi & Fandiño Pinilla, 2013, p. 190).

Alla fine degli anni '90' l'OCSE lancia un ambizioso progetto per valutare in che modo i ragazzi che terminano l'istruzione obbligatoria, nei diversi paesi del mondo, abbiano acquisito le competenze essenziali per la loro vita futura, come cittadini responsabili.

La parola chiave diventa quindi *competenza* e in particolare per la matematica, *mathematical literacy* (Ibidem).

OCSE-PISA intendeva, e intende, valutare (e anche misurare) quanto, dell'insieme di conoscenze e abilità apprese a scuola, un ragazzo è in grado di trasferire nei differenti contesti in cui si troverà ad operare. La prima indagine si svolse nel 2000 e da allora si tiene con scadenza triennale.

L'indagine del 2012 ha come focus la competenza in matematica e in problem solving. Queste competenze sono state riformulate, rispetto alle precedenti edizioni, nel modo che segue:

1. «Per competenza matematica si intende la capacità di un individuo di utilizzare e interpretare la matematica e di darne rappresentazione mediante formule, in una varietà di contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico, per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate, che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo»
2. « Per problem solving si intende la capacità di un individuo di mettere in atto processi cognitivi per comprendere e risolvere situazioni problematiche per le quali il percorso di soluzione non è immediatamente evidente. Questa competenza comprende la volontà di confrontarsi con tali situazioni al fine di realizzare le proprie potenzialità in quanto cittadini riflessivi e con un ruolo costruttivo».

Al cuore di OCSE-PISA è il cosiddetto *ciclo della matematizzazione,* nel quale viene schematizzata la mathematical literacy, quando viene esplicitata. Questo ciclo comprende due processi di matematizzazione orizzontale, che vengono definiti come il processo di *formulare* e quello di *interpretare*, e un processo di *matematizzazione verticale*, che viene definito come il processo di *interpretare*. Tale ciclo è raffigurato nella figura 4.

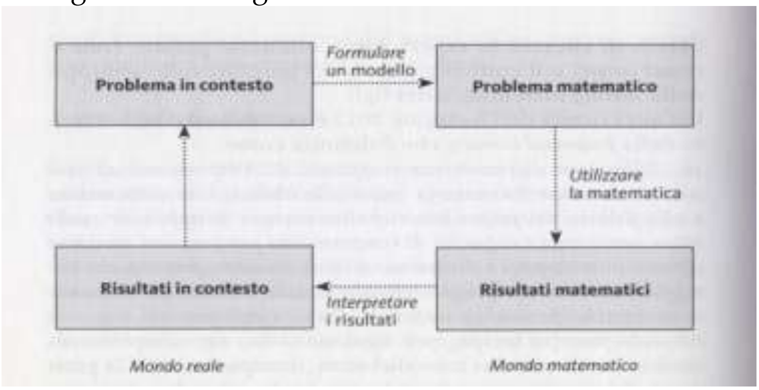


Figura 4: Ciclo della ma tematizzazione (OCSE-PISA)(Bolondi & Fandiño Pinilla, 2013).

I tre verbi, formulare (impostare), utilizzare e interpretare si riferiscono dunque ai processi in cui sono impegnati i ragazzi in quanto solutori di problemi. Nella fase di impostazione l'allievo deve prendere una situazione così come si presenta nel contesto reale e trasformarla in una forma trattabile matematicamente, dandole una struttura e una rappresentazione (ad esempio tramite un grafico una rappresentazione geometrica) (ibid.).

Nella fase di impostazione di un compito il ragazzo deve prendere una situazione così come si presenta nel contesto reale e trasformarla in una forma trattabile matematicamente, dandole una struttura e una rappresentazione.

Nella fase di applicazione il ragazzo mette in campo ragionamenti matematici, utilizza concetti e procedure, esegue calcoli, analizza matematicamente le informazioni che ha raccolto e rappresentato, usa strumenti di calcolo.

Nella fase di interpretazione il ragazzo riflette sulle soluzioni matematiche che ha trovato e interpreta i risultati nel contesto del problema.

Ecco dunque che il quadro di riferimento di OCSE-PISA 2012 ci offre un'articolazione dell'attività matematica dei ragazzi, quando risolvono un problema e può essere molto utile come quadro concettuale per gli insegnanti, affinché loro meglio comprendano gli apprendimenti dei propri allievi. (Bolondi & Fandiño Pinilla, 2013, p. 195).

4.4. Problemi, problem solving e le Indicazioni Nazionali in Italia

Prendiamo ora in considerazione il testo delle Indicazioni Nazionali per il curricolo del 2012 ed esaminiamo la sua relazione con la risoluzione dei problemi.Si tratta del documento al quale si è fatto riferimento nel porre alcune domande chiave dell'intervista utilizzata nella ricerca qui esposta.

Nelle Indicazioni Nazionali c'è una parte di testo, che non riguarda in modo specifico la matematica e che descrive l'ambiente di apprendimento della scuola del primo ciclo:

«Favorire l'esplorazione e la scoperta al fine di promuovere il gusto per la ricerca di nuove conoscenze. In questa prospettiva la problematizzazione svolge una funzione insostituibile, sollecita gli alunni: ad individuare problemi, a sollevare domande, a mettere in discussione conoscenze già elaborate, a trovare adeguate piste di indagine, a cercare soluzioni finali»(I.N. pp. 26 -27).

Tale testo sottolinea l'importanza della problematizzazione per tutte le attività, e non solo per la matematica. Sono in esso indicate, dopo i due punti, una serie di azioni che si possono promuovere, particolarmente importanti. Il problema, inoltre, è legato al tentativo di "cercare" la soluzione e non di "trovare" la soluzione, come di solito si chiede nelle attività in aula» [7](Di Martino, 2018).
Esaminiamo ora il seguente estratto delle Indicazioni Nazionali:

«Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde

[7] Tale considerazione è stata effettuata da Pietro Di Martino, nell'ambito di un Laboratorio da lui coordinato nell'ambito dei lavori della V Scuola estiva per docenti di Matematica a Frascati, dal 27 al 31 agosto del 2018. Si rimanda, per approfondimenti ai materiali pubblicati sul sito dell'UMI-CIIM.

semplicemente ricordando una definizione o una regola. Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che s'intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive» (I.N., p. 49).

Si nota che questo testo non si focalizza esclusivamente sulla "risoluzione", intesa come individuazione di una soluzione, ma si articola in diverse fasi altrettanto importanti: affrontare situazioni problematiche, rappresentarle; esplorare;congetturare; individuare possibili strategie risolutive.Questa articolazione "sdrammatizza" l'importanza di dover arrivare a un risultato corretto e sottolinea come nel percorso educativo "risolvere" non sia l'unico obiettivo dell'attività con i problemi: per insegnare (e imparare) a risolvere i problemi, prima si deve insegnare (e imparare) ad affrontarli. L'accento è posto, quindi, sui processi che caratterizzano l'approccio a un problema, processi che descrivono anche l'attività tipica dei matematici. (Di Martino & Zan, 2017).

Parte seconda:
la ricerca

Capitolo quinto

L'oggetto della ricerca

5.1 Dal quadro teorico al problema di ricerca

La letteratura esaminata nei capitoli precedenti ha permesso di inquadrare teoricamente i diversi oggetti coinvolti in questo nostro studio: il significato della parola "problema" e le sue caratteristiche, il problem solving, il costrutto di convinzione (*belief*), nelle sue accezioni più specifiche e nelle relazioni che ha con gli atteggiamenti, le conoscenze, le emozioni.

Si assume che il costrutto di convinzione, inteso come composizione di elementi cognitivi, affettivi, emozionali, di atteggiamento, possa essere utile per interpretare le dichiarazioni e le riflessioni dei docenti, nel corso di una lunga intervista, appositamente predisposta e che sarà descritta nelle prossime pagine.

In particolare, centriamo la nostra attenzione su quegli aspetti che Zan (2010^2, p. 195) mette in evidenza, quando parla di processi di controllo che un insegnante attiva quando prende delle decisioni in un contesto di insegnamento/ apprendimento matematico.

Lo studio che si va a presentare ha l'intento di studiare:

1. le convinzioni dei docenti partecipanti alla ricerca, rispetto ad uno specifico compito: il problema matematico;
2. la dichiarazione delle loro scelte didattiche sulla didattica dei problemi, acquisite anche in riferimento alle Indicazioni Nazionali per il curricolo, che costituiscono attualmente il principale documento guida per la progettazione dei percorsi didattici dei docenti, sulla matematica e sulle altre discipline;
3. le teorie del successo "abbracciate" rispetto alla risoluzione dei problemi.

Di seguito, si presenta uno schema che sintetizza l'articolazione dell'oggetto di studio della nostra ricerca.

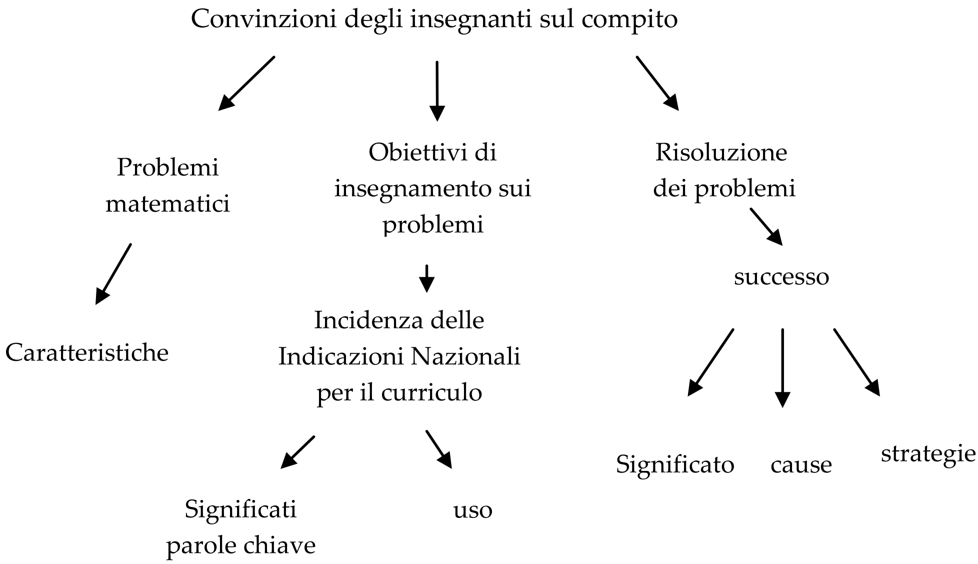


Figura 5: Articolazione dell'oggetto di studio della ricerca di dottorato

5.2. Le domande della ricerca

Avendo come riferimento lo schema precedente, il principale interrogativo che ci si è posti è il seguente:

- *Quali sono le convinzioni degli insegnanti di scuola primaria sui problemi matematici, sugli obiettivi di insegnamento che orientano la loro pratica didattica in riferimento alle Indicazioni per il curricolo, sulle caratteristiche del successo nella risoluzione dei problemi?*

Tale interrogativo si articola in tre domande di ricerca, ciascuna delle quali è ulteriormente definita con delle sottodomande, che assumono la funzione di guida nella fase di strutturazione dell'intervista e che guideranno la classificazione, l'analisi e l'interpretazione dei dati raccolti.

Di seguito si presentano le domande e le sottodomande:

D1. Quali sono le convinzioni che gli insegnanti di scuola primaria hanno sui problemi matematici?

- Quali caratteristiche deve avere, per gli insegnanti, un problema matematico?

- Quale/i tipologia/e di problema/i gli insegnanti apprezzano maggiormente? Per quali ragioni?
- Quale/i tipologia/e di problema/i gli insegnanti dichiarano di voler proporre maggiormente ai loro alunni in aula? Per quali ragioni?
- Quale relazione c'è tra l'apprezzamento di determinati problemi e la disponibilità a proporli in classe?
- Quale valutazione gli insegnanti danno dei problemi presenti sui libri di testo? Quali revisioni apporterebbero ad essi per renderli dei buoni problemi?

D2. Quali sono le convinzioni che gli insegnanti hanno sugli obiettivi di insegnamento che potrebbero orientare la pratica didattica sui problemi, in riferimento alle Indicazioni Nazionali per il curricolo?

- Gli insegnanti ritengono utili le Indicazioni Nazionali rispetto al lavoro in classe sui problemi? Quali parti utilizzano e perché? Quali sono gli aspetti delle Indicazioni che gli insegnanti considerano critici rispetto al lavoro sui problemi?
- Quali significati gli insegnanti attribuiscono ad alcuni termini chiave presenti nel testo delle Indicazioni Nazionali: discussione, argomentazione, contesto significativo legato alla vita quotidiana?

D3. Quali convinzioni gli insegnanti hanno sul "successo" nella risoluzione dei problemi, rispetto al suo significato, alle sue cause e alle strategie che si possono mettere in atto per raggiungerlo?

- Quali convinzioni hanno gli insegnanti rispetto alla figura dell'alunno "buon risolutore"? Cosa può fare un insegnante che voglia aiutare un suo alunno a diventare un buon risolutore?
- Quali convinzioni hanno gli insegnanti rispetto alle difficoltà che un alunno può incontrare nel corso della risoluzione di un problema? Cosa può fare un insegnante che voglia aiutare un suo alunno ad affrontare le difficoltà che incontra nel risolvere un problema?

Capitolo sesto

La metodologia della ricerca

6.1. Scelte metodologiche effettuate per la raccolta dei dati

La ricerca empirica compiuta si connota come uno studio di tipo esplorativo-qualitativo in termini "lumbelliani" (Vannini, 2009).

Di seguito, si illustra il percorso di riflessione che ha condotto alla scelta di tale specifico approccio.

Nella ricerca educativa possiamo riconoscere due grandi paradigmi di riferimento:

> «il primo, di stampo positivista e sperimentale, orientato verso una visione ontologica di una realtà singola, oggettivabile e osservabile dal soggetto e all'interno del quale è possibile rintracciare connessioni causali generalizzabili secondo una prospettiva nomotetica. Il secondo, di stampo costruttivista e fenomenologico, orientato verso una visione ontologica in cui vi sono più realtà: costruite, dialogicizzate e negoziate tra soggetti diversi»(Vannini, 2009, p. 6).

Ciò ha condotto a volte ad un "arroccamento" dei ricercatori sulle diverse posizioni difese a priori, che non è stato costruttivo né rispetto alla possibilità di cogliere le molteplici vie della razionalità umana né rispetto alla necessità di far progredire la ricerca in campo educativo.

Si tratterebbe invece di dichiarare che gli scopi che i due approcci possono avere sono differenti, e che dunque anche i contesti di applicazione dei risultati determinano la minore o maggiore adeguatezza di un paradigma metodologico anziché di un altro (Vannini, 2009, p.12).

Il paradigma positivista-quantitativo sembra essere più adatto a quella parte della ricerca orientata alla politica scolastica, mentre la ricerca che è rilevante per l'operatore scolastico dovrebbe essere più ermeneutica e qualitativa nel suo approccio (ibid.).

La ricerca quantitativa vede, durante il suo percorso, l'importanza dell'approccio qualitativo soprattutto in due momenti: come fase esplorativa per la definizione delle ipotesi ed eventualmente come fase conclusiva finalizzata ad approfondire l'interpretazione dei risultati attraverso l'osservazione delle ricadute che essi hanno su specifici contesti educativi. (Vannini, 2009, pp. 12-13).

La fase iniziale di esplorazione e di approfondimento di un problema conduce alla definizione delle ipotesi iniziali della ricerca e ciò corrisponde alla nascita di uno "spazio di aggancio" tra pensiero teorico e pensiero pratico, a cui occorre saper ritornare nelle successive fasi del percorso di ricerca, nella fase di riflessione sui dati raccolti (ibid.).

Appare dunque importante dedicare grande attenzione alla fase di definizione delle ipotesi: è proprio in questo preciso momento che le procedure di ricerca qualitativa costituiscono una metodologia molto rilevante per approfondire ulteriormente la conoscenza della situazione problematica, per derivare da essa suggestioni e per interrogarsi sulla validità dei paradigmi interpretativi prescelti rispetto alle ipotetiche soluzioni che si vanno determinando. Lumbelli (2006, p. 45, cit. da Vannini, 2009, p. 16) parla di

«ricerca *esplorativa*, che ha lo scopo di "mettere alla prova di realtà" i concetti o le variabili di ipotesi, da controllare poi sperimentalmente […]; un'indagine empirica che è qualitativa nel senso di *preliminare* a, o *preparatoria* della ricerca sperimentale o "quantitativa».

E ancora scrive:

«Si tratta in sostanza di tutto ciò che avviene in un processo di ricerca prima che essa entri nella sua fase centrale, di esperimento e di osservazione controllata o provocata, basata su ipotesi ben precise che si riferiscono a variabili rigorosamente determinate in termini di fatti misurabili o comunque traducibili in dati quantitativi» (Lumbelli, 1984, p. 113).

Il compito della ricerca, quindi, diviene quello di individuare e definire la fenomenologia delle situazioni e dei comportamenti nei contesti educativi, in un processo continuo di deduzione-induzione, che va dai fatti all'elaborazione teorica e viceversa. In tal modo risulta anche pienamente valorizzato quel momento creativo di definizione delle ipotesi, così importante nel metodo scientifico, così come lo descrive Dewey.

Vannini (2009, p. 16) scrive:

«La fase esplorativa-qualitativa tende quindi a definire variabili da controllare o categorie di osservazione da utilizzare, in una fase in cui si va attuando la progressiva operazionalizzazione dei concetti che andranno poi a costituire le vere e proprie variabili della ricerca quantitativa».

È in questa stessa fase, inoltre, che possono dunque essere messi a punto anche gli strumenti di rilevazione dei dati, in modo tale da assicurarne la validità rispetto ai concetti operativi definiti. Particolarmente utile, in questo momento, è l'abitudine a provare gli strumenti in situazioni circoscritte, al fine di identificarne i punti di debolezza e operare in tempo gli opportuni aggiustamenti. Il disegno applicativo per il controllo delle ipotesi prenderà dunque forma in questo processo esplorativo-qualitativo, in questo spazio/tempo in cui variabili, ipotesi e strumenti - posti a confronto serrato con alcune situazioni concrete attraverso il processo dell' osservazione - riusciranno ad evidenziare la loro pregnanza e validità rispetto al problema di partenza (Vannini, 2009, p. 16).

Nella presente ricerca, definita quindi "esplorativo-qualitativa", si è scelto di utilizzare una traccia di intervista, come strumento per indagare le convinzioni degli insegnanti, presupponendo che gli stessi, nel rispondere alle domande poste, potessero esplicitare esperienze e storie didattiche, in maniera ricca e approfondita, con elementi coerenti, ma anche contraddittori, e che tendessero a "cucirli" introducendo nessi percepiti come causali o semplicemente cronologici (Di Martino, 2004, p. 99), indicativi comunque della complessità delle convinzioni, che costituiscono l' oggetto dello studio intrapreso.

È stata utilizzata un' intervista originale, appositamente messa a punto per questo lavoro di ricerca. La sua costruzione è avvenuta per gradi: il testo dell'intervista, presentato in Appendice come Allegato A, è la versione finale di uno strumento a lungo sperimentato in fase di try out con 30 docenti, molte volte modificato, sia per quanto riguarda la formulazione delle domande, sia rispetto ai sette problemi scelti, messi a punto e posti all'attenzione e all'analisi dei docenti.

Nella fase di try out, lo scopo del ricercatore è stato quello di sondare, nel modo più preciso possibile, sia la comprensione e l'interpretazione di ciascuna domanda che il tipo di risposte attivate (Zammuner, 1998, p. 73). Il metodo (o procedura adottata) è simile al *thinking aloud*, che è sinonimo di intervista cognitiva e che è più utilizzato nell'ambito delle ricerche sui processi di soluzione dei problemi. In entrambi i casi si tratta di applicare una delle seguenti procedure:

a) il soggetto viene istruito a pensare ad alta voce, man mano che legge una domanda, e le sue alternative di risposta (se sono contemplate);

b) il soggetto dapprima legge e risponde a tutte le domande e poi, una domanda alla volta, cerca di ricordare e di esplicitare come ha interpretato quella domanda e come è arrivato a formulare la risposta (ibid.).

Nella fase di try out della nostra ricerca, al fine di mettere a punto la traccia di intervista, è stata utilizzata la procedura indicata con la lettera *a*: è stato così possibile sondare se un termine o un fraseggio fosse compreso allo stesso modo da tutti gli intervistati, se una domanda risultasse troppo complessa e se dovesse essere suddivisa in più domande; è stato infine messo a punto l'ordine di presentazione delle stesse. I problemi sono stati scelti, testati, modificati in modo tale che fossero il più possibile rappresentativi di alcune tipologie ipotizzate e approfondite succesivamente nel paragrafo 6.4, in modo tale da sollecitare reazioni diverse da parte dei 45 docenti del campione.

Il try out descritto è stato effettuato con insegnanti di Roma e provincia, con i quali è stato possibile avere un'interazione faccia a faccia. In generale i 30 insegnanti intervistati hanno offerto un grande contributo alla messa a punto dell'intervista, grazie ai loro commenti, alle loro reazioni e riflessioni.

L'intervista utilizzata in questa ricerca è semi-strutturata, con domande sia aperte che chiuse, il cui fraseggio è stato più o meno definito a priori (Zammuner, 1998, p. 68), nel senso che a volte è stato lievemente modificato nella forma, non nella sostanza, al momento della domanda posta oralmente dall'intervistatore.

Una buona parte delle interviste è stata effettuata faccia a faccia, e ciò ha permesso di osservare, grazie all'interazione diretta, il comportamento non verbale dell'intervistato, che ha orientato eventuali richieste di charimento, al momento dell'intervista, ma che non è stato oggetto specifico di analisi nella ricerca.

Un'altra parte delle interviste è stata svolta telefonicamente, in viva voce, nelle situazioni in cui i soggetti intervistati erano più lontani geograficamente oppure quando, in pochi casi, non è stato possibile definire un orario e/o un luogo fisico per l'incontro tra intervistato e intervistatore. Le interviste hanno avuto in media la durata di 60 minuti e sono state tutte audioregistrate e trascritte integralmente.

Rispetto all'analisi delle interviste, si è scelto di utilizzare l'approccio conosciuto come *content analysis*. Sono state definite a priori le categorie e, alla luce di esse, sono state etichettate, e poi classificate, le sequenze di testo. L'analisi del contenuto delle interviste è stata un'analisi a spirale: la lettura ha suggerito nuove "categorie interpretative", che hanno a loro volta stimolato una più profonda lettura dei dati. Per poter effettuare l'analisi del contenuto nel modo in cui è stato descritto, è stato utilizzato il software NVIVO 11[8].

Allo scopo di rispondere ad alcune sottodomande, è stata effettuata anche un'analisi quantitativa di una parte dei dati raccolti, pur se su un campione poco numeroso (45 insegnanti).

In conclusione, si aggiunge qualche nota sullo stile tenuto dalla ricercatrice nel suo ruolo di intervistatrice (Zammuner, 1998, p. 308), specificando le azioni effettuate:
- presentazione di sé e della ricerca (scopi, ente di ricerca, contenuti in sintesi dell'intervista);
- creazione di un rapporto interpersonale caratterizzato da neutralità amichevole e cordiale;
- lettura delle domande e delle alternative di risposta, nel caso delle risposte chiuse;
- registrazione dell'intervista con un audioregistratore, dopo aver chiesto e ottenuto l'autorizzazione dell'intervistato/a;
- invito al *probing*, per un approfondimento delle risposte, al fine di rendere il loro contenuto più sostanziale, ogni volta che è stato necessario.

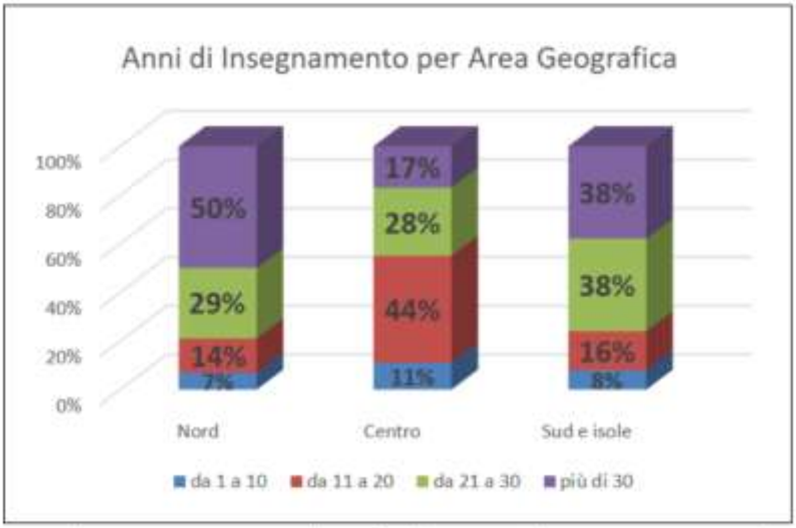
6.2. **Gli insegnanti partecipanti alla ricerca**

Per quanto riguarda la scelta dei partecipanti alla ricerca, si è fatto ricorso a un campionamento derivato da procedure non probabilistiche.

L'intervista è stata somministrata a 45 insegnanti di classe quarta primaria che si sono dichiarati disponibili a collaborare, in diverse regioni d'Italia: Lazio, Campania, Puglia, Sicilia, Emilia Romagna, Trentino Alto Adige, Piemonte; nello specifico sono stati intervistati 14 insegnanti del Sud e delle Isole (Sicilia), 18 del Centro e 13 del Nord. Per poter acquisire più elementi possibili, sono stati coinvolti insegnanti con diverse anzianità di servizio, rispetto agli anni di insegnamento complessivi nella scuola primaria, ma anche rispetto al numero di anni di insegnamento della matematica e, nello specifico, in classe quinta. La composizione del campione rispetto al genere rispecchia il dato (fonte MIUR 2016) che su una popolazione di insegnanti di scuola primaria di 245 506 solo il 3,6% è costituito da uomini.

[8] NVIVO è un ambiente di lavoro che permette l'importazione dei dati acquisiti con le interviste, la loro codifica in categorie e sottocategorie, la loro analisi, visualizzazione e presentazione.

Gli insegnanti intervistati sono tutti di classe quarta, dal momento che i problemi presentati all'analisi dei docenti sono stati predisposti per la classe quinta. Si è presupposto, quindi, che potessero essere i più adatti a immedesimarsi nella situazione di poter proporre, da lì a pochi mesi, i problemi proposti nel corso dell'intervista. Sono stati acquisiti dati sulla formazione dei docenti, che non è però stata intesa come mera partecipazione a corsi di aggiornamento, a convegni o ad altre possibili iniziative. La formazione è stata definita come «l'insieme di quelle esperienze che abbiano effettivamente modificato o avviato un processo di modifica delle convinzioni degli insegnanti, sul tema dei problemi, della risoluzione dei problemi e della relativa pratica didattica»[9]. I grafici 1 e 2, mostrati di seguito, illustrano le percentuali relative alla collocazione geografica degli insegnanti, in relazione all'anzianità di servizio (grafico 1) e alle esperienze formative (grafico 2).



Area G.	Anni di Insegnamento da 1 a 10	da 11 a 20	da 21 a 30	più di 30	TOT.
Nord	1	2	4	7	14
Centro	2	8	5	3	18
Sud e isole	1	2	5	5	[illegible]
					[illegible]

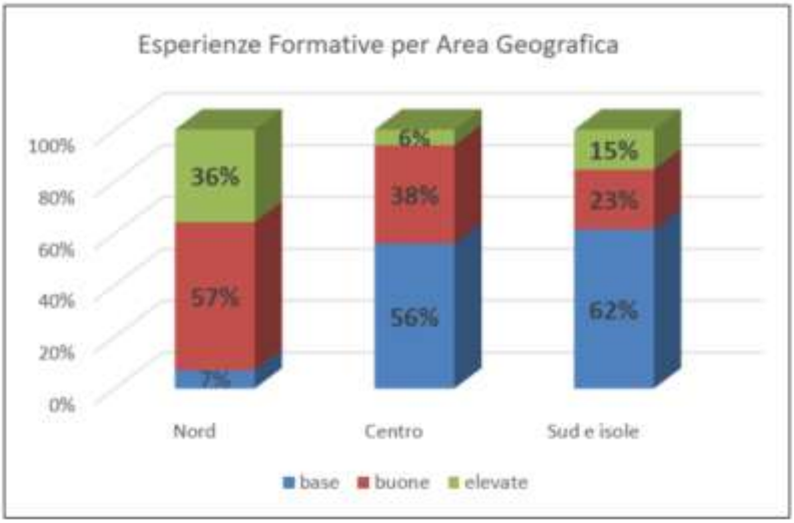
Area G.	Anni di Insegnamento da 1 a 10	da 11 a 20	da 21 a 30	più di 30	TOT.
Nord	7%	14%	29%	50%	100%
Centro	11%	44%	28%	17%	100%
Sud e isole	8%	16%	38%	38%	100%

Grafico 1: Distribuzione dei partecipanti per area geografica e anzianità di servizio

Il grafico 1 mostra che le percentuali degli insegnanti con meno di 10 anni di anzianità di servizio sono basse in tutte e tre gli strati geografici. Al Centro

[9] Tale definizione di "formazione" mi è stata suggerita dalla professoressa Rosetta Zan, nel corso di un incontro avuto con lei nel corso del mio dottorato.

prevalgono i docenti che hanno tra gli 11 e 20 anni di insegnamento (44%). Al Nord prevalgono i docenti che hanno più di 30 anni di insegnamento. Al Sud e nelle Isole i docenti, per il 76%, ha oltre i 20 anni di anzianità di servizio.
Presentiamo ora il grafico 2.



	Esperienze Formative			
Area G.	base	buone	elevate	Tot.
Nord	1	8	5	14
Centro	10	7	1	18
Sud e isole	8	3	2	13
				45

	Esperienze Formative			
Area G.	base	buone	elevate	Tot.
Nord	7%	57%	36%	100%
Centro	56%	38%	6%	100%
Sud e isole	62%	23%	15%	100%

Grafico 2. Distribuzione dei partecipanti per area geografica ed esperienze formative

Il grafico 2 mostra che gli insegnanti intervistati al Nord hanno un livello di formazione più elevato rispetto agli insegnanti intervistati al Centro e al Sud.
Specifichiamo i significati che sono stati attribuiti ai diversi livelli di formazione:

Livello elevato: insegnanti che hanno seguito attivamente diversi corsi di formazione, partecipato a Convegni e che hanno al loro attivo sperimentazioni didattiche.

Livello medio: insegnanti che hanno partecipato a corsi di formazione sulla matematica, ma che sono in una fase evolutiva di cambiamento professionale.

Livello base: insegnanti che non hanno avuto esperienze dichiarate di formazione nell'ambito matematico oppure ne hanno avute di sporadiche e che hanno fondamentalmente maturato delle esperienze sul campo.

6.3. L'intervista

L'intervista, nella sua versione finale, è strutturata in tre sezioni (cfr. Allegato A in Appendice):

La **prima sezione** contiene domande che mirano a raccogliere le seguenti informazioni del docente intervistato: scuola di appartenenza, anzianità di servizio, anni di insegnamento nella scuola primaria, anni di insegnamento in quinta classe primaria. Si chiede, inoltre, ai docenti di narrare brevemente il proprio rapporto con la matematica e in particolare con i problemi, invitandoli a raccontare le esperienze formative ritenute più significative per l'evoluzione della propria pratica didattica sui problemi. La sezione termina con la richiesta di esplicitare le caratteristiche auspicate per un problema matematico e la percepita relazione esistente tra le Indicazioni Nazionali del 2012 e la propria progettazione didattica relativa al lavoro sui problemi.

Nella **seconda sezione**, molto più corposa e presentata in dettaglio nel paragrafo 6.4., sono presentati sette problemi, diversamente classificati e pensati per la classe quinta primaria. I docenti sono invitati a leggere ed analizzare ciascuno dei problemi sulla base di alcune sollecitazioni. Prima di tutto si sonda la disponibilità del docente a proporre ciascuno dei sette problemi agli alunni della loro futura classe quinta. Si chiede, poi, di esplorare ed esprimere il grado percepito di discussione e argomentazione che ciascun problema può sollecitare, il livello di significatività e autenticità del suo contesto, la modalità organizzativa ritenuta più idonea per il lavoro in classe, la possibile utilizzazione del problema come strumento matematico: verifica, applicazione e consolidamento oppure strumento per la costruzione dei concetti. Si chiede al docente di proporre eventuali modifiche al testo per migliorarlo. Per ogni domanda si chiede di esplicitare le motivazioni delle risposte. Infine, si invita a formare due diverse graduatorie: la prima, sulla base dell'apprezzamento personale dei problemi; la seconda, sulla base della loro percepita applicabilità in aula, di lì a qualche mese, con i propri futuri alunni di classe quinta.

La **terza sezione**, conclusiva, raccoglie le convinzioni che l'insegnante ha sulle caratteristiche dell'allievo "buon risolutore" e sulle possibili strategie che possono aiutare un bambino a diventare tale. Si acquisiscono, anche, la descrizione delle più frequenti difficoltà incontrate nel corso della risoluzione dei problemi e la descrizione delle strategie didattiche ritenute più utili sia ad affrontare tali difficoltà, sia a garantire una migliore produttività degli alunni che stanno risolvendo problemi. Si indaga sulle opinioni che gli insegnanti hanno dei problemi proposti sui libri di testo e si chiede, infine, di delineare proposte formative ritenute utili per migliorare la didattica dei problemi.

6.4. I problemi

I problemi, come si è già detto, sono stati scelti in modo tale che fossero adeguati, sia dal punto di vista della rappresentatività di alcune tipologie di prove ipotizzate, che della potenzialità a sollecitare risposte diverse da parte dei 45 docenti del campione.

Perché è stata fatta questa scelta? Per diverse ragioni: nel lavorare sui problemi ci si trova di fronte a testi classificabili in diverse tipologie e che possono assumere specifici ruoli in relazione allo sviluppo delle diverse componenti dell'apprendimento matematico: algoritmica, strategica, comunicativa, semiotica e concettuale (cfr. § 1.3, pag. 26).

Spesso mancano ai problemi quei requisiti di "autenticità", "significatività", "aderenza alla realtà", che il testo delle Indicazioni Nazionali auspicherebbe, ma di cui però non esplicita i significati, lasciandoli alla libera interpretazione dei lettori (Di Martino & Zan, 2017).

La consapevolezza delle caratteristiche e delle potenzialità formative dei problemi, la loro analisi, l'esplicitazione di eventuali modifiche e riscritture costituiscono uno strumento che non solo è importante per un docente, che ha il compito di decidere quali problemi proporre ai propri alunni con consapevolezza, ma anche un buon mezzo per un ricercatore che vuole indagare sulle convinzioni che sottendono le dichiarazioni, le riflessioni e le pratiche di un docente (cfr. § 3.1.2 e 3.1.3, pp. 69-78).

Di seguito, si riportano i testi completi di ciascun problema e si descrivono di ognuno le principali caratteristiche:

1. Rocco e il suo giardino (problema standard)

Zio Rocco decide di sistemare il giardino della sua casa al mare. Questo giardino è a forma di rettangolo: misura 6 m di larghezza e 4,5 m di lunghezza. Lo zio decide di disporre piante con fiori sul suo contorno. Sistemando una piantina ogni 4 metri, quante piantine riesce a sistemare Rocco? Per ciascuna spende € 3,80. Quanto spende in tutto?

È un problema a più operazioni che coinvolge sia l'ambito aritmetico che geometrico; è assimilabile a una tipologia di problemi tipica dei libri di testo. Ci sono diversi oggetti matematici in gioco; per risolverlo è richiesta l' applicazione di conoscenze e regole apprese a scuola.

2. Le monete (problema narrativo)

Piero e Francesco partono per una gita a piedi. Piero mette nel suo zainetto 5 panini e Francesco mette 7 panini nel suo. Lungo la strada incontrano uno sconosciuto, affamato, ma senza provviste. Decidono di mettere in comune i loro panini e mangiano tutti e tre un ugual numero di panini. Al momento di lasciarsi, lo sconosciuto, come ringraziamento per il pane ricevuto, dà 5 monete a Piero e 7 a Francesco. Piero dice: «Ne vedi dare solo 3 a me e 9 a Francesco. Infatti anche noi abbiamo mangiato parte dei 12 panini». Al momento di lasciarsi, lo sconosciuto, come ringraziamento per il pane ricevuto, dà 5 monete a Piero e 7 a Francesco. Piero dice: «Ne devi dare solo tre a me e 9 a Francesco. Infatti anche noi abbiamo mangiato parte dei 12 panini». Francesco dice: « Dal punto di vista della matematica Piero ha ragione. Ma l'importante è che ognuno di noi ha messo quello che aveva: quindi dai 6 monete a Piero e 6 a me». Lo sconosciuto non ha più cosa fare. Non capisce perché dal punto di vista della matematica sarebbe più giusto dare 3 monete a Piero e 9 a Francesco.
Prova a spiegarglielo. Tu al posto dello sconosciuto cosa faresti? 6 monete a Piero e 6 a Francesco? Oppure 3 a Piero e 9 a Francesco? Oppure 5 monete a Piero e 7 a Francesco?

Si tratta di un testo narrativo, che è la formulazione a righe di un problema tratto dal capitolo quarto *Pane e pensiero* del libro *L'uomo che sapeva contare*, di Malba Tahan. Le soluzioni proposte si basano su valutazioni diverse, alcune squisitamente matematiche, altre non matematiche. I processi decisionali che portano alla scelta della soluzione sono il frutto di un bilancio tra diversi elementi, in cui entra in gioco la matematica con il ragionamento proporzionale, ma anche valutazioni di carattere morale e affettivo (Zan, 2016, pp. 218-219).

3. Una mostra in aula (compito di realtà)

Scegli una parete della tua aula, dove esporre i tuoi lavori più significativi della classe. Misura le dimensioni della parete. Hai a disposizione cartelloni di misura 70 cm x 100 cm. Quanti cartelloni ti occorrono al massimo se vuoi tappezzare la parete?

Questo problema potrebbe essere considerato un compito di realtà oppure un compito autentico, se risponde a un effettivo bisogno degli alunni della classe. Un compito è autentico quando il bambino produce conoscenza nell'agire riflessivo, in situazioni di realtà; si tratta di problemi complessi, aperti, che gli allievi affrontano per apprendere ad usare nel reale le conoscenze, le abilità e le capacità personali. Un compito può essere reale ma non autentico. I bambini, nel problema *Una mostra in aula* potrebbero procedere in diversi modi: calcolare le dimensioni dell'aula, per poter calcolare l'area, e poi stabilire quanti cartoncini rettangolari della misura data sono contenuti in essa. Potrebbero effettuare delle azioni concrete, per vedere quanti cartoncini di quelle dimensioni si possono utilizzare. Potrebbero anche rendersi conto che il risultato dell'algoritmo, che viene fuori dal calcolo dell'area, non è lo stesso di quello ottenuto quando si effettua una verifica operativa, e ciò potrebbe portare a una discussione.

4. Il commerciante (problema standard)

Il signor Giorgio fa il commerciante. Compra 436 penne a € 0,80 ciascuna. Rivende la metà delle penne e incassa € 266,00. Quanto guadagna per ogni penna?

Si tratta di un classico problema scolastico standard sulla compravendita: il testo è brevissimo e, tra i dati numerici, quello che potrebbe spiazzare qualche bambino è l'espressione linguistica "la metà", rappresentata nel registro linguistico, anziché in quello simbolico (0,5 o ½).

5. Gli alunni di Anna (esercizio anticipato)

La maestra Anna, parlando dei suoi allievi, disse: «La metà dei miei allievi ama solo la matematica. La quarta parte ama solo le scienze: 1/7 ama solo l'arte e il disegno. Inoltre tre alunni amano tutte le materie». Quanti sono complessivamente gli alunni di Anna?

Il problema è stato modificato a partire dal classico problema presente in letteratura "Gli allievi di Pitagora". *Si* tratta di un testo che può essere presentato agli allievi di quinta come esercizio anticipato; ha le caratteristiche tipiche di questa categoria di problemi, così come sono state illustrate nel capitolo primo. Gli alunni, attraverso strategie e rappresentazioni spontanee, meglio se in un setting di piccolo gruppo, potrebbero arrivare alla soluzione. Tale problema può mettere in difficoltà gli stessi docenti che lo leggano per la prima volta, oppure, ad una lettura poco attenta, potrebbe essere scambiato per un classico problema di calcolo di frazioni o interpretato come problema a cui manca un dato.

6. Il rettangolo (prova simil-Invalsi)

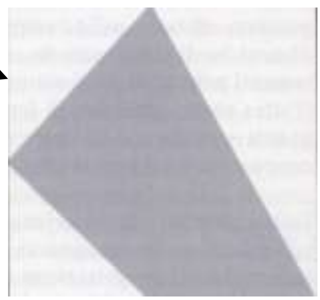
Marco dice: «Se raddoppia la misura del perimetro di un rettangolo, anche la sua area raddoppia…».

Sei d'accordo con lui? *Sì* *No*
Giustifica la tua risposta……………………………………………….

Il problema è privo di dati numerici. Mette alla prova la presenza nei bambini di una misconcezione secondo cui ci sia una relazione direttamente proporzionale tra misura del perimetro e misura dell'area, nel momento in cui si modificano l'uno e l'altra in una stessa figura. I bambini possono verificare con disegni o altre strategie la falsa affermazione e sono chiamati esplicitamente a giustificare le conclusioni a cui sono arrivati. Di proposito non sono stati inseri nel testo elementi che richiamano un contesto reale.

7. Il giardino di Torquato (non standard inclusivo)

Questo è il giardino del signor Torquato



Nella parte grigia egli ha piantato fiori e ha seminato a prato la parte bianca. Il signor Torquato osserva il suo giardino e si chiede: «Sarà maggiore l'area della parte con i fiori o quella della parte con il prato?.» Quale sarà la risposta? Spiega il tuo ragionamento.

Si tratta ancora di un problema privo di dati numerici. La figura che è all'interno del quadrato è un quadrilatero non standard. La risoluzione del problema, che mette in gioco i concetti di area e di equiscomponibilità, può prevedere la messa in gioco di diversi procedimenti risolutivi. Il supporto grafico potrebbe rendere più semplice la spiegazione della risoluzione. È un problema potenzialmente ricco in quanto gli approcci degli allievi possono essere vari, così come vari sono i processi risolutivi messi in atto (Zan, 2010, p. 270).

Capitolo settimo

L'analisi dei dati e l'interpretazione dei risultati

7.1. Rilevazione dei dati e domande di ricerca

Le ricerche educative non sempre si prestano a disegni sperimentali e a trattamenti statistici dei dati […]. Negli stili di ricerca che si muovono verso lo studio di contesti, problematiche e dimensioni quali-quantitative si procede all'interpretazione dei risultati e delle diverse evidenze empiriche attraverso forme argomentative e logiche diverse (Benvenuto, 2015, p. 136). Si riportano, di seguito, alcune piste che si possono percorrere nell'interpretazione dei risultati e delle strategie di scoperta di significato di cui si è tenuto conto nella presente ricerca, sia per l'interpretazione dei dati che per l'indicazione degli sviluppi futuri (Trinchero, 2002, pp. 316-317, cit. da Benvenuto, 2015, p. 136):

- rilevare le forme, i modelli, le strutture, i temi e le immagini che si ripetono regolarmente nella base empirica;
- non scartare i risultati che contraddicono l'intuizione senza aver preso in considerazione la possibilità di rivedere l'intuizione stessa;
- raggruppare i casi studiati in categorie, comporre schemi riassuntivi e cercare di stabilire tutti i legami possibili tra soggetti, fattori, processi. Ciò può permettere di andare poi a verificare se questi legami abbiano effettivo riscontro nella realtà empirica.

Negli schemi presentati nelle figure 6, 7 e 8, viene messa in evidenza la relazione tra le domande di ricerca e la rilevazione dei dati, effettuata con specifiche domande presenti nell'intervista, già presentata e riportata, come allegato, alla pagina 169.

LA RILEVAZIONE DEI DATI

Prima domanda di ricerca:
Quali sono le convinzioni degli insegnanti di scuola primaria sui problemi matematici?

Le caratteristiche auspicate

Domanda 3 dell'intervista: *Quali caratteristiche deve avere un problema matematico?*

Le tipologie apprezzate

Domanda 6 dell'intervista : (…) *Componi una graduatoria dei sette problemi, mettendo al primo posto quello che ti piace di più a e all'ultimo posto- quello che ti piace di meno. Motiva le tue scelte.*

Le tipologie proponibili

Domanda 7 dell'intervista: (…) *Componi una seconda graduatoria, mettendo al primo posto quello che ritieni più adatto da proporre in classe ai tuoi alunni e all'ultimo quello che ritieni meno adatto. Motiva le tue scelte.*

La valutazione dei problemi presenti sui libri di testo e le modifiche proposte.

Domanda 13 dell'intervista: *Sei soddisfatto/a dei problemi presenti nei libri di testo? (Se si, spiega le motivazioni della tua risposta).*

Domanda 14 dell'intervista: *Quali suggerimenti daresti ai responsabili di una casa editrice che intendono migliorare i problemi presenti sui libri di testo?*

Figura 6: La rilevazione dei dati rispetto alla prima domanda di ricerca

Seconda domanda di ricerca:

Quali sono le convinzioni che gli insegnanti hanno sugli obiettivi di insegnamento che orientano la loro pratica didattica sui problemi, in riferimento alle Indicazioni Nazionali per il curricolo?

Grado e modalità di utilizzazione delle Indicazioni Nazionali per il curricolo nella progettazione sui problemi

Aspetti ritenuti critici delle Indicazioni Nazionali per il curricolo

Domanda 4 dell'intervista: *Nella progettazione delle tue attività sui problemi, tieni conto del testo delle Indicazioni Nazionali per il curricolo? Si/No. Se hai risposto sì, quale parte delle Indicazioni utilizzi per progettare attività sui problemi*? *Perché?*

Significati attribuiti a termini chiave delle Indicazioni: discussione, argomentazione, contesto significativo legato alla vita quotidiana…

Domanda 5 dell'intervista:

Ti presento alcuni problemi. Analizzali in base alle domande che ti pongo.

a. Rocco e il suo giardino (standard)

b. Le monete (narrativo)

c. Una mostra in aula (compito di realtà)

d. Il commerciante (standard)

e. Gli alunni di Anna (esercizio anticipato)

f. Il rettangolo (test simil-Invalsi)

g. Il giardino di Torquato (testo non standard inclusivo)

Ciascun insegnante intervistato è stato invitato a rispondere a ciascuna delle seguenti domande:

1. *Proporresti il problema il prossimo anno ai tuoi allievi di quinta primaria?Si/No. Motiva il perché della tua risposta.*

2. *Valuta in quale grado il problema può sollecitare negli alunni discussione e argomentazione (…). Motiva il perché della tua risposta.*

3. *Valuta in quale grado il problema propone un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana(…). Motiva il perché della tua risposta.*

4. *Quale delle seguenti modalità organizzative utilizzeresti per far lavorare i tuoi futuri alunni di quinta alla risoluzione del problema (lavoro individuale, in coppia, per gruppi omogenei, per gruppi eterogenei,, discussione con tutta la classe, altro (specificare). Motiva il perché della tua risposta.*

Figura 7: La rilevazione dei dati rispetto alla seconda domanda di ricerca

Terza domanda di ricerca:

Quali convinzioni gli insegnanti hanno sul "successo" nella risoluzione dei problemi, rispetto al suo significato, alle sue cause e alle strategie che si possono mettere in atto per raggiungerlo?

Le caratteristiche del buon risolutore →

Domanda 8 dell'intervista: *Esistono alunni che sono buoni risolutori?* Si/No. *Se hai risposto sì, quali elementi caratterizzano il buon risolutore?*

Le strategie degli insegnanti per favorire il successo degli alunni nella soluzione di problemi →

Domanda 9 dell'intervista: *Può un insegnante aiutare un suo alunno a diventare un "buon risolutore"?*Si/No. *Se hai risposto sì, esponi cosa un insegnante potrebbe fare.*

Le difficoltà incontrate dagli alunni →

Domanda 10 dell'intervista: *Quali sono le difficoltà più frequenti che i tuoi alunni incontrano nei problemi?*

Le strategie degli insegnanti per aiutare a superare le difficoltà degli alunni →

Domanda 11 dell'intervista: *Cosa fai quando riscontri che qualche tuo alunno sta incontrando le difficoltà che hai indicato nel rispondere alla domanda precedente?*

Figura 8: La rilevazione dei dati rispetto alla terza domanda di ricerca

7.2. Le convinzioni degli insegnanti sui problemi matematici

L'analisi dei dati, nella sua esposizione al lettore, si propone come una risposta dettagliata alle domande e alle sottodomande sopra descritte. Nella presentazione dei risultati sono state riportate le parole dei docenti stessi, curando di sostituire i loro nomi reali con nomi di fantasia.

Partiamo dalla prima domanda:

D1. Quali sono le convinzioni che gli insegnanti di scuola primaria hanno sui problemi matematici?

Per poter rispondere a questa domanda, sono state dettagliate ulteriormente le sottodomande del § 5.2., pp. 90-91:

1a. Per gli insegnanti, quali caratteristiche deve avere un problema matematico?
1b. Quale posizione, all'interno di una graduatoria di apprezzamento, gli insegnanti attribuiscono a ciascun problema, tra i 7 presentati dal ricercatore e diversamente caratterizzati? Con quali motivazioni spiegano la collocazione data a ciascun problema in tale graduatoria?
1c. Quale posizione, all'interno di una graduatoria di presumibile applicabilità, gli insegnanti attribuiscono a ciascun problema, tra i 7 presentati dal ricercatore e diversamente caratterizzati? Con quali motivazioni spiegano la posizione di ciascun problema in graduatoria?
1d. Quali relazioni ci sono tra le due graduatorie, di apprezzamento e di applicabilità?
1e. Quale valutazione gli insegnanti danno dei problemi presenti sui libri di testo?
1f. Come gli insegnanti immaginano sia possibile migliorare i problemi presenti sui libri di testo?

Si procede, ora, all'analisi dei dati e all'interpretazione dei risultati.

7.2.1. Le caratteristiche di un problema matematico: la chiarezza

Per acquisire dati utili al fine di poter rispondere alla sottodomanda 1a, è stata posta, nell'intervista effettuata ai 45 docenti, la seguente domanda:

-*Quali caratteristiche deve avere, secondo te, un problema matematico*?

Di seguito, si presentano, in figura 9 e nella tabella 2, i risultati di una query di word frequency elaborata con NVIVO 11, che mostra le parole più frequenti presenti nelle risposte degli insegnanti alla domanda posta.

Figura 9. Frequenza del lessico nelle risposte dei docenti alla domanda 1

Word	Lenght	Count
chiaro	6	21
testo	5	20
chiarezza	9	10
dati	4	10
parole	6	8
realtà	6	8

Tabella 2. Le sei parole più frequenti nelle risposte dei docenti alla domanda 1

L'analisi del lessico evidenzia come siano: "chiaro", "testo" e "chiarezza" le tre parole più frequenti presenti nelle risposte dei docenti, seguite da: "dati", "parole" e "realtà". In particolare, cumulando le frequenze di "chiaro" e "chiarezza", 31 sono i conteggi.

Ma cosa vuol dire che un problema deve essere "chiaro"? Quale significato danno gli insegnanti a questo termine?

Una lettura delle risposte dei docenti, più estesa e approfondita, ha permesso di comprenderlo:
-chiaro dal punto di vista della comprensione linguistica dei testi
-chiaro dal punto di vista della facilitazione dei processi di risoluzione matematica.

Al fine di spiegare tale classificazione, si riportano alcune sequenze delle risposte date dai docenti, quando si è chiesto quali caratteristiche auspicano per un problema matematico:

Es. 1. «*Deve essere chiaro, non molto lungo, non deve contenere più di due domande, più di due operazioni, perché poi i bambini si perdono. Deve contenere i dati, anche quelli nascosti; ovvio, i bambini poi ci arrivano, un po' discutendo, le classiche parole magiche, le parole chiave, che devono essere contenute nel testo, nella domanda, cerco di avviarli in forma di gioco*» (Sara).

Es. 2. *«Deve essere chiaro, non tanto lungo (…). Partendo dalle domande esplicite, poi quelle implicite. Ho visto in alcuni testi che ci sono degli asterischi dove dovrebbe essere inserita la domanda implicita. È bene lasciarli e poi piano piano toglierli»* (Annabella*).*

Es. 3. *«Una caratteristica principale è la chiarezza. Non deve avere troppi dati, altrimenti i bambini vanno in tilt e non sono in grado di capire il testo del problema. Per chiarezza intendo il testo e anche la chiarezza dei dati matematici che non devono essere troppo arzigogolati»* (Iacopo).

I primi tre esempi riportati mettono in evidenza che il termine *chiaro* è considerato dal punto di vista dei processi della risoluzione matematica dei problemi; sintetizzando:

«il testo non deve essere troppo lungo; non deve avere più di due domande e più di tre operazioni; deve essere corredato da parole chiave, con la presenza anche di stratagemmi (gli asterischi) che permettono ai bambini di individuare le domande nascoste».

In questi casi la "chiarezza" dei testi dei problemi che i docenti auspicano allude alla presenza di elementi (parole chiave, asterischi, limiti date alle domande e alle operazioni) che hanno la funzione di "mettere in condizione" i bambini di risolvere il problema, evitando il più possibile difficoltà nella risoluzione. In questo caso i docenti sembrano essere interessati al risultato, al prodotto, più che alla valorizzazione dei processi risolutivi. Alla luce delle teorie del successo, illustrate in § 2.1.2, p. 54, questi insegnanti identificano il successo degli allievi, nel problem solving matematico, con il "buon rendimento" e il "raggiungimento del risultato".

Riportiamo, di seguito, una sequenza di altre tre risposte.

Es. 4. *«Deve essere non di esecuzione, di regole, ma di applicazione logica. Per i bambini che hanno difficoltà frasi brevi, a tappe; chiarezza nella richiesta per tutti» (Serena).*

Es. 5. *«Deve essere chiaro, deve essere un po' una sfida per chi lo fa. A volte sono poco chiari nella struttura del testo. Nella comprensione del testo. A volte sono ingannevoli, perché sono messi in un italiano scorretto» (Sandra).*

Es. 6. *«Deve spingere al ragionamento. La componente logica è fondamentale. Poi la chiarezza del testo, soprattutto per bambini abbastanza piccoli. I termini devono essere comprensibili» (Elisabetta).*

Questi ulteriori esempi di risposte: 4, 5 e 6, mettono in evidenza che il termine *chiaro* è inteso sicuramente rispetto alla comprensione linguistica del testo del problema: «*italiano corretto, frasi brevi, termini comprensibili*». Dal punto di vista dei processi matematici, invece, si mette in evidenza che «*deve essere un testo di applicazione logica, una sfida per chi la fa, deve spingere al ragionamento*».
Facendo riferimento di nuovo alle teorie del successo, già menzionate, si può affermare che le parole di questa seconda triade di docenti mostrano interesse per i *processi* risolutivi dei bambini, quando si trovano ad affrontare un problema. Per chiarire meglio, gli insegnanti ritengono che il testo di un problema che si propone all'allievo debba essere ben scritto e comprensibile in italiano, ma ciò non toglie che debba anche essere stimolante rispetto ai processi risolutivi che mette in atto, ed essere quindi un problema adeguatamente sfidante e interessante, oltre che chiaro dal punto di vista linguistico.

Appare comunque evidente, nell'analizzare le risposte dei docenti, che la posizione degli insegnanti non è mai così netta; Serena, per esempio, immagina un problema che stimoli la logica per i bambini che non abbiano difficoltà; per gli altri servono «frasi brevi, a tappe»

Nella tabella 3, presentata di seguito, sono riportate due liste di espressioni linguistiche degli insegnanti, riferibili alle due diverse accezioni individuate.

Chiaro (comprensione linguistica)	**Chiaro (facilitazione dei processi di risoluzione matematica)**
Messo in un italiano semplice	Non deve contenere più di due domande e di due operazioni
I termini devono essere comprensibili	Deve contenere i dati, ma non troppi e non troppo arzigogolati, perché altrimenti i bambini vanno in tilt
A volte l'italiano è scorretto	Deve contenere le parole chiave
Evitare le subordinate	In alcuni testi ci sono gli asterischi, dove si inserisce la domanda implicita
Curare la sintassi e la forma del testo	I problemi devono essere prevedere delle tappe
Esposizione chiara, comprensibile	Il testo deve essere breve e conciso
Testo spalmato e chiaro	Il testo non deve essere troppo lungo
Limpido e lineare	Se immediatamente colgo i dati, il quesito, il resto viene da sé

Tabella 3. Classificazione delle risposte degli insegnanti rispetto al significato di "chiaro"

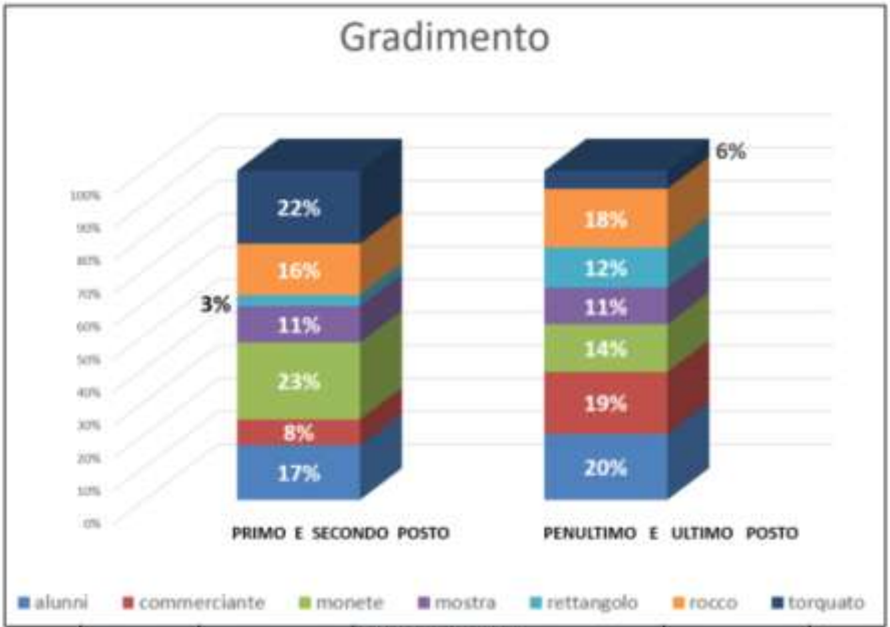
7.2.2. Problemi a confronto: le preferenze dei docenti

Le sottodomande 1b e 1c, presentate a pagina 109, miravano ad acquisire informazioni sulle preferenze che i docenti avevano rispetto ai problemi proposti alla loro analisi. Sono state dunque poste, nel corso dell'intervista, le seguenti domande:

> *-Hai letto e analizzato i 7 problemi. Ora componi una graduatoria, mettendo al primo posto il problema che ti piace di più e all'ultimo posto quello che ti piace di meno. Motiva le tue scelte.*

-Componi ora una seconda graduatoria, mettendo al primo posto il problema che ritieni più applicabile in classe ai tuoi futuri alunni di quinta e all'ultimo posto quello che ritieni meno adatto. Motiva le tue scelte.

Con l'uso di Excel sono state, in una prima fase, analizzate le preferenze dei docenti rispetto al gradimento dei problemi, sommando quante volte ciascun problema era stato collocato nelle prime due posizioni (gradimento maggiore) o nelle ultime due posizioni (gradimento minore). Non sono state considerate, per questa specifica analisi, le posizioni intermedie.
Il grafico 3 indica le percentuali di gradimento dei problemi:



	GRADIMENTO			
gradimento	PRIMO / SECONDO POSTO		PENULTIMO / ULTIMO POSTO	
problemi	Punteggio	% su 90 punteggi	Punteggio	% su 90 punteggi
alunni	15	17%	18	20%
commerciante	7	8%	17	19%
monete	21	23%	13	14%
mostra	10	11%	10	11%
rettangolo	3	3%	11	12%
rocco	14	16%	16	18%
torquato	20	22%	5	6%
	90	100%	90	100%

Grafico 3: Il gradimento dei problemi

Il problema narrativo *Le monete* è stato collocato al primo o al secondo posto per il 23% (la percentuale più alta); per il 14% è stato collocato al penultimo o all'ultimo posto.

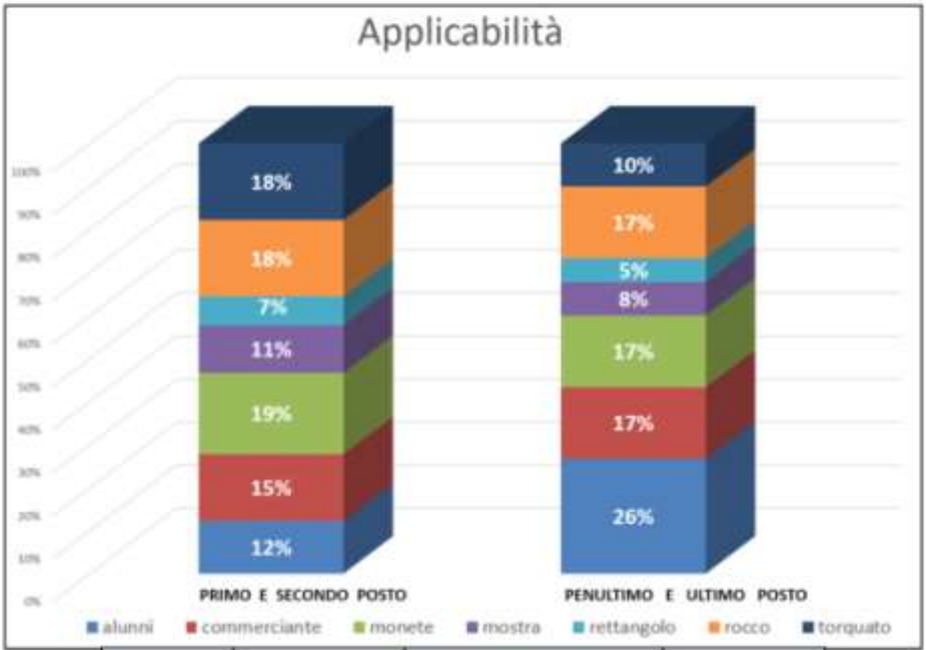
Un altro problema apprezzato dai docenti è stato il problema non standard inclusivo *Il giardino di Torquato,* indicato per il 22% al primo o al secondo posto e solo per il 6% al penultimo o ultimo posto. Una lettura più analitica dei dati raccolti ha mostrato che questo problema non è stato mai collocato all'ultimo posto.

Due problemi che non sono sembrati particolarmente graditi ai docenti sono stati: il problema standard *Il commerciante (*per l'8% nelle prime due posizioni, per il 19% nelle ultime) e il problema simil-Invalsi *Il rettangolo* (3% nelle prime due posizioni).Gli altri problemi si sono collocati nelle prime e nelle ultime posizioni in modo abbastanza equilibrato: *Rocco e il suo giardino* (16% e 18%), *La mostra in aula* (11% e 11%), *Gli alunni di Anna* (17% e 20%).

Una prima interpretazione di questi dati porta a riflettere sul fatto che ci sono due problemi, tra i sette proposti, che sembrano essere più interessanti agli occhi del ricercatore: *Le monete* e *Il giardino di Torquato*; il primo divide nettamente in due i docenti: ci sono insegnanti che lo apprezzano molto e insegnanti che lo rifiutano assolutamente, come vedremo in una successiva e più approfondita analisi delle risposte.

Sono state analizzate, in una seconda fase, le preferenze dei docenti rispetto all'applicabilità in aula dei problemi proposti, sommando quante volte ciascun problema era stato collocato nelle prime due posizioni (applicabilità maggiore) o nelle due ultime posizioni (applicabilità minore).

Questo aspetto dell'applicabilità è stato considerato molto utile per favorire il coinvolgimento dei docenti, dal momento che avrebbero potuto fare riferimento a destinatari reali: i loro futuri alunni di quinta classe. Si presenta di seguito il grafico 4.



	APPLICABILITA'			
Applicabilita'	PRIMO / SECONDO POSTO		PENULTIMO / ULTIMO POSTO	
problemi	Punteggio	% su 90 punteggi	Punteggio	% su 90 punteggi
alunni	11	12%	24	26%
commerciante	14	15%	15	17%
monete	17	19%	15	17%
mostra	10	11%	7	8%
rettangolo	6	7%	5	5%
rocco	16	18%	15	17%
torquato	16	18%	9	10%
	90	100%	90	100%

Grafico 4: L'applicabilità dei problemi in aula con i futuri alunni

L'analisi del grafico 4 permette di effettuare alcune considerazioni: i due problemi *Il Giardino di Torquato* (non standard inclusivo) e *Le monete* (narrativo) mantengono percentuali buone anche per l'applicabilità (rispettivamente 18% e 19% al primo o al secondo posto), anche se la percentuale di docenti che colloca *Il giardino di Torquato* agli ultimi due posti per applicabilità (10%) è inferiore alla percentuale di docenti che colloca ilproblema narrativo *Le monete* (17%) nelle stesse posizioni.
L'esercizio anticipato *Gli alunni di Pitagora* è considerato poco applicabile (26% al penultimo o ultimo posto). Il problema simil-Invalsi *Il rettangolo* anche in questa graduatoria mostra di avere delle percentuali basse: 7% e 5%.

È necessario tuttavia chiarire che, trattandosi di un campione poco numeroso, si può parlare di "tendenze a preferire" determinati problemi da parte degli insegnanti. Tali tendenze andranno poi confermate, o disconfermate, in uno sviluppo dello studio da effettuare su un campione molto più numeroso.
A questo punto, confrontiamo le due graduatorie: di gradimento e di applicabilità (fig. 10).

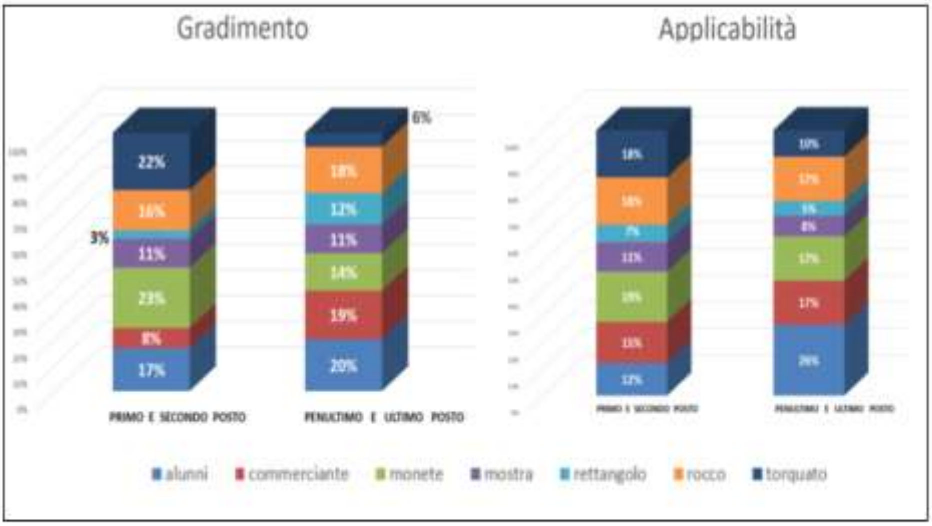


Figura 10: Confronto tra grafici di gradimento e grafici di applicabilità

Si procede ora con un'analisi puntuale delle preferenze dei docenti, considerando uno per uno i singoli problemi.

Il problema narrativo *Le monete* (narrativo) è gradito dai docenti ma una parte di essi ritiene di non poterlo rendere applicabile in aula (23% versus 19%). Anche il problema *Il giardino di Torquato* (non standard inclusivo) è gradito dai docenti ma non da tutti è ritenuto applicabile (22% versus 18%). Il problema standard aritmetico *Il commerciante* è poco gradito dagli insegnanti, che comunque lo ritengono applicabile in aula (8% versus 15%). Il problema standard *Rocco e il suo giardino* sembra essere più gradito rispetto all'altro standard *Il commerciante* ed è anche ritenuto applicabile. *Gli alunni di Anna*, pur essendo un problema abbastanza gradito, perde in applicabilità (17% versus 12%)

Una mostra in aula (compito di realtà) e *Il rettango*lo (prova simil-Invalsi) sono meno presenti nelle posizioni estreme (I e II posto; VI e VII posto).

Questa discrepanza, tra problemi graditi e problemi ritenuti applicabili in classe, potrebbe essere un indicatore anche di contraddizioni presenti nelle convinzioni dei docenti: «*Gli adulti portano con sé analoghi complessi di enunciati e sentimenti conflittuali, la cui natura contraddittoria raramente diventa motivo di turbamento nella vita di ogni giorno*». (cfr.§ 2.1., p. 49).

7.2.3. Primo piano su alcuni problemi

Gli insegnanti intervistati, dunque, hanno espresso convinzioni diverse sui sette problemi presentati e una variabilità maggiore è emersa rispetto ai tre problemi: *Le monete*, *Il giardino di Torquato* e *Il commerciante*, che hanno sollecitato pareri contrastanti e, a volte, una intensa partecipazione dei docenti intervistati, sia dal punto di vista della valutazione cognitiva che delle reazioni emotive.

Elenchiamo, di seguito, gli aspetti che sono sembrati più significativi nell'analisi dei problemi. A supporto delle affermazioni effettuate, si riportano sequenze di testo, tratte dalle trascrizioni delle interviste dei docenti.

Il problema non standard inclusivo *Il giardino di Torquato* è gradito ai docenti (22%), in quanto è visto come un problema che richiede ragionamento, stimola la discussione e permette la costruzione di competenze. Non è uno dei soliti problemi standard, in quanto è senza numeri e propone una figura irregolare. Stimola la creatività, la capacità di vedere in geometria e di immaginare movimenti e spostamenti che portano a valutare l'equiestensione.

Ma ciò che piace molto di questo problema ai docenti è il fatto che permetta di utilizzare strategie risolutive molto diverse tra loro, tra cui:

1) l'individuazione di figure geometriche note, la misurazione delle dimensioni e l'applicazione delle formule studiate;

2) la visualizzazione della figura divisibile in due parti equivalenti per area e quindi la risoluzione orale immediata, senza uso di formule o altri calcoli scritti;

3) il ritaglio e la sovrapposizione.

Quest'ultima opzione, il ritaglio, assume un valore molto diverso per i docenti: per alcuni è una strategia utilizzata da bambini che hanno difficoltà, per altri è una strategia creativa e originale.

«*Tutti i bambini di qualsiasi livello potrebbero*» (Concetta).

«Forse qualcuno potrebbe dire: "E se ritagliamo la parte bianca e la sovrapponiamo a questa?" Io glielo proporrei, per vedere se qualcuno sa trovare delle soluzioni alternative al fatto che non ci sono numeri. Un problema che non ha numeri la sollecita la discussione, perché tu devi trovare una strategia; a me è venuta quella della sovrapposizione, ma magari a un bambino viene un'altra… che sia diversa da quella aritmetica. Mi sembra abbastanza semplice; dovrebbe essere accessibile anche al bambino che ragiona di meno» (Serena).

«*Questo somiglia a un problema che era stata dato una settimana fa nelle prove Invalsi. Lo sfondo però era quadrettato. Questo lo darei, perché vedono come fare, come si può dividere, come è il modo più semplice, quello che richiede più passaggi, quello che richiede meno passaggi, perché poi alla fine la soluzione migliore è quella più economica, quella che richiede meno operazioni. Hai voglia di parlare, di discutere tra bambini. Questo non è il solito problema, ma è stimolante. Il bambino, anche se dovesse sbagliare la risposta, però ha fatto tutto questo lavoro precedente: di ragionamento, di scomposizione, di riconoscimento delle figure e sta acquisendo competenze, capacità di ragionare, di argomentare*» (Stella).

«*A me piace tantissimo questo. Lo proporrei sicuramente perché è un problema che sviluppa proprio la capacità di "vedere" in geometria. Potrebbero affrontarlo come lavoro individuale: ciascuno vede a livello visivo, poi discussione con tutta la classe; poi farei un lavoro per gruppi eterogenei per risposte. Modi differenti di risolvere lo stesso problema. Bambini che hanno avuto un modo diverso di operare si confrontano tra di loro. Gli diamo un certo tempo, tipo 10 minuti. Se ho più soluzioni accettabili, vanno bene tutte. Dovrebbero arrivare ad una composizione delle divergenze*» (Delia).

Lo stesso problema *Il giardino di Torquato* mette però in crisi una parte dei docenti (6%), in quanto viene ritenuto un problema nel quale non ci sono dati esplicitati, è diverso dagli altri. Sembra essere un lavoro complesso, rispetto alle figure geometriche coinvolte, e risolvibile solo dai bambini"intuitivi". La figura non standard, che per i docenti prima citati era stato uno stimolo per il ragionamento, viene considerato un oggetto che pone difficoltà agli allievi, da evitare.

«L'impatto è visivo e non ci sono dati esplicitati. No, non mi convince, perché diciamo che mancano dei dati ed è anche un lavoro a livello di figure geometriche abbastanza complesso. Non è regolare e dovrebbero solo esprimersi in base all'impatto visivo. Loro possono rispondere: si o no; però poi non c'è un riscontro» (Ilaria).

«Lo proporrei dando delle indicazioni, del tipo: "Ragiona sul tipo di figure presenti nel giardino. Calcola l'area," …Così posto, non lo darei. Si bloccherebbero e non lo discuterebbero» (Marcella).

«No, a dire la verità, no. Lo vedo un po'… L'area della parte con i fiori e la parte con il prato. Semmai alla fine della quinta, ma nemmeno. Trovare l'area di questa figura…Non ci sono dati. È diverso dagli altri» (Loretta).

Il problema narrativo *Le monete*, come abbiamo già scritto, divide nettamente i docenti: una parte di essi apprezza molto questo problema (23%), perché coinvolge il ragionamento logico, stimola la discussione e l'elaborazione di soluzioni non solo di tipo matematico ma anche socio-affettive, permette di costruire competenze e di argomentare.

Questo è logico, proprio. Si, lo proporrei, perché bisogna sviluppare la logica e non pedissequamente i conti. Bisogna sviluppare proprio il procedimento logico. È parecchio interessante. Perché non possono fermarsi alla prima risposta e quindi devo ragionarci parecchio» (Nicoletta)

«Bello articolato. Bisognerebbe fare delle simulazioni, perché i bambini si incasinerebbero subito. Lo proporrei perché è un problema che sollecita la discussione, per cui vedresti atteggiamenti diversi rispetto alla soluzione e soprattutto rispetto alla motivazione della soluzione. È un'occasione per costruire la possibilità di ragionare. E anche un po' di competenze» (Marta).

«È interessante. Si, lo proporrei, perché dà spazio alla conversazione, a chiedersi tanti perché. Innanzitutto la discussione: […], e potrebbe far riferimento a situazioni reali.

Anche perché si presta a diverse interpretazioni, sia sul piano sociale affettivo che sul piano matematico. Potrebbe essere uno strumento per costruire competenze: nell'argomentare, nel tentare di arrivare anche alla soluzione matematica utilizzando il linguaggio della matematica stessa» (Benedetta*).*

Tuttavia un buon numero di insegnanti non lo gradisce (14%), nel vederlo così lungo, qualcuno si rifiuta addirittura di leggerlo.

Questo problema è ritenuto complicatissimo dal punto di vista del linguaggio: farraginoso, ingarbugliato, con troppi dati numerici. Secondo gli insegnanti, i bambini cercherebbero subito i numeri e sui libri di testo non troverebbero mai un problema così. I bambini si potrebbero addirittura spaventare; qualora un insegnante lo volesse proporre, lo dovrebbe suddividere in parti, raccontare, rappresentare. Si citano le parole di Beatrice, prima, durante e dopo la lettura del testo, e anche di altri due docenti.

«*A pelle non lo leggono, è la verità, perché è troppo lungo. Perché sono pigri. Ho quattro bambini DSA, quindi questo non lo proporrei mai. Per loro è troppo lungo, devo trovare soluzioni. Poi mi cercherebbero subito i numeri, pur di non leggerlo. Io sto dicendo proprio i casi. Infatti ora lo leggo adesso, ma a loro può dare fastidio. Poi questo è scritto al computer; dettandolo viene lungo tutta la pagina del quaderno*» (Beatrice, prima di leggere il testo del problema).

«*È complicatissimo per loro, devono ragionare tantissimo. I miei farebbero un disegno per distribuire le monete, farebbero una cosa del genere*» (Beatrice, nel corso della lettura).

«*Non lo proporrei, per la lunghezza. Potrei proporlo non a testo, lo farei rappresentare materialmente. Lo racconterei senza leggerlo, come faccio con le monete. Sto spiegando l'euro. Devono comprare. A loro darebbe fastidio, non capirebbero. I miei scrivono i dati, le informazioni, Qui sono tante*» (Beatrice, alla fine della lettura).

«*Francamente questo problema è troppo farraginoso, secondo me ha troppi dati numerici, troppe sfaccettature, troppi rimandi, troppe proposizioni secondarie. Un bambino qua fa una fatica bestia a capire un problema del genere. A parte che è troppo lungo. Secondo me. Questo non va per niente bene per me. Questo non lo proporrei. Anche perché ti dico una cosa: io che è un po' di tempo che insegno […]. La scuola primaria è quasi diventata una scuola secondaria, Non sono in grado i bambini di affrontare un problema così. E ti dico che sui sussidiari di quinta non troverai mai un problema così. Perché i bambini non sono in grado di reggere una lunghezza simile perché, quando arrivano alla quinta, alla sesta e alla settima riga, si sono dimenticati la seconda e la terza*»(Iacopo*).*

«Oh, mamma mia; viene il mal di testa. Ecco perché c'è quella forma di avversione per la matematica. No. No. No. Non lo proporrei perché è troppo arzigogolato,ci sono troppe risposte da dare e i ragazzi si confondono. No. Troppe parole, troppi nomi, due monete, troppo complesso. Lavorare con le monete lo facciamo già quest'anno. Con la manipolazione noi personalmente,per spiegare i centesimi, per spiegare le frazioni ...ho usato le monete. Con i centesimi, con i decimi c'è una aderenza anche con le frazioni. Se noi lavoriamo con bambini di una fascia di età, che sono ancora piccini, non lo dimentichiamo mai, questo. Per cui io devo costruire nel bambino l'astrazione della frazione, del denominatore, del numeratore, di un euro che vale dieci monete da dieci centesimi...Ma questo lo si fa proprio facendoglielo toccare. Questo problema, che mi ha fatto sudare un

po', non mi piace. Le monete, come dicono le Indicazioni Nazionali, che sono uno strumento autentico e significativo, le usiamo già adesso» (Adriana).

Il problema standard *Il commerciante* non sembra essere particolarmente gradito dai docenti (8%) per diversi motivi: i bambini hanno un rapporto mediato con il commercio ed è un argomento per loro difficile da capire, come anche il concetto di "ingrosso". Non è ritenuto un problema particolarmente originale, in quanto testi di questo tipo sono su tutti i libri; l'argomentazione che viene messa in gioco non è un vera e propria argomentazione, ma è una "discussione" che nasce per la necessità di chiarire la confusione tra i vari termini della compravendita. Non c'è in esso nulla di creativo e si può anche proporre nelle classi precedenti.

«Questo è proprio sintetico al massimo. Questi sono i classici problemi che si propongono. Si, lo proporrei, sono quei problemi classici. E qui la discussione è molto più ampia, perché purtroppo loro non capiscono che un commerciante deve comprare anche lui, ci deve guadagnare perché ci deve guadagnare. C'è tutta prima una discussione sul perché c'è la spesa, perché c'è il ricavo, perché c'è il guadagno. È vero che c'è la formuletta, ma in realtà loro non lo vivono, perché non sono commercianti» (Monica).

«[…] Mi sembra comunque un problema molto difficile, questo. Secondo me questo problema ha molte più difficoltà di un problema in cui il commerciante vende il totale delle penne acquistate. Perché anch'io ho dei limiti, no? Perché praticamente secondo me il primo approccio è di far vedere come il costo viene distribuito ugualmente su tutte le penne. Se lui avesse avuto a disposizione magari più soldi e avesse comprato 10 000 penne all'ingrosso invece di 4000 il prezzo sarebbe sceso. Il prezzo è da collegare al blocco di penne. Quindi una quantità ridotta di penne costa così; una quantità molto maggiore costa molto di meno. Quindi anche il guadagno deve essere visto distribuito per tutto lo stock delle penne. Semplicemente per questo. Questa è una difficoltà, la metà. Che lui non ha rivenduto tutte le penne. Il prezzo è qualcosa che collego al numero delle penne; è tutta questa proporzione scende se compro uno stock maggiore. *Qui c'è il discorso dell'ingrosso che secondo me è un concetto che si può introdurre. Il commerciante compra dove vendono gli stock; addirittura potrebbe andare alla fabbrica della BIC. Stimola tanto l'argomentazione e la discussione per questa cosa che dicevo di come funziona il commercio, che nemmeno io lo so. Per esempio a Roma c'è solo un grande ingrosso di una penna, poi ci sono tanti piccoli negozi che ce li hanno a prezzi economici, poi ci sono le librerie, poi ci sono i bar»* (Filippo).

«Sono problemi di compravendita e sono su tutti i sussidiari. C'è un po' di argomentazione ma non è un'argomentazione. Una volta che è stato risolto da qualcuno, questo qualcuno non fa fatica a spiegare; è una soluzione abbastanza lineare. Mentre per le monete e per i cartelloni è più elaborata. Come per il perimetro e i fiori: può esserci più una difficoltà di applicazione. Io l'argomentazione la vedo come qualcosa di più creativo, qui di creativo non vedo quasi niente. Non è un problema che li tocca più di tanto quando discuto io in classe di queste robe qua. Non ci capiscono quasi niente del rivendere e guadagnare. C'è per esempio la discussione, che però non è una discussione, non è un'argomentazione, ma un chiarimento sui termini, sui significati. Rivende la metà delle penne e incassa; quando guadagna per ogni penna, per loro è la stessa cosa. La differenza non esiste. Finché faccio questi problemi qua la settimana seguente se lo ricordano, però per loro non appartiene questa realtà, a meno che non siano figli di commerciante, e quindi da lì a qualche giorno se lo dimenticano pure» (Isabella).

Il problema scelto come compito di realtà *Una mostra in aula* ha evidenziato delle problematicità: in fase di stesura (è stato più volte riscritto e modificato), in fase di accoglienza dei docenti intervistati, per questioni logistiche (è difficile per i bambini misurare la parete) e anche per questioni di autenticità. Pur essendo il testo del problema inserito in un contesto reale, non sembra scontato che possa coinvolgere gli allievi; più volte i docenti hanno proposto altre versioni; si citano le parole di Alba:

«*Io inizierei a porre semplicemente il problema. "Dobbiamo fare questa cosa. Sentiamo che consigli mi date per sistemare questa cosa. Poi sentiamo un po' cosa viene fuori e poi a imbuto ci andiamo a infilare in conversazioni più centrate sulle questioni matematiche. In prima istanza: "Noi abbiamo questo mucchio di disegni. Se volessimo sistemarli, in che modo potremmo fare. Ogni gruppetto espone la sua proposta. L'importante è lavorare in un contesto protetto, in un contesto guidato sereno, dove nessuno si sente giudicato e sereno e le risposte non hanno un significato di giudizio*».

Elenchiamo, a conclusione del paragrafo, gli aspetti più ricorrenti nell'analisi dei problemi:

1° aspetto: le medesime caratteristiche di uno specifico problema sono considerate positive da alcuni docenti e negative da altri:

«*L'impatto è visivo e non ci sono dati esplicitati. No, non mi convince, perché diciamo che mancano dei dati ed è anche un lavoro a livello di figure geometriche abbastanza complesso*» (Ilaria e *Il giardino di Torquato*).

«A me piace tantissimo questo. Lo proporrei sicuramente perché è un problema che sviluppa proprio la capacità di "vedere" in geometria. Potrebbero affrontarlo come lavoro individuale: ciascuno vede a livello visivo, poi discussione con tutta la classe; poi farei un lavoro per gruppi eterogenei […]» (Delia e *Il Giardino di Torquato*).

2° aspetto: un problema, di per sé, non è né un buon problema né un problema di poco valore; sono importanti piuttosto le modalità con le quali un insegnante presenta il problema.

«Per me dipende da come lo poni. La discussione nasce perché il commerciante…che cosa fa? Perché la metà? Poi il prezzo unitario, il prezzo totale… C'è di tutto e di più. È molto significativo. È anche sempre un problema di esperienza e vita reale. Noi poi in questi giorni stiamo proprio parlando del commerciante: chi è, che fa. I bambini, devo dire, sono sempre stimolati» (Caterina e *Il commerciante*).

«Qui c'è il discorso dell'ingrosso, che secondo me è un concetto che si può introdurre. Il commerciante compra dove vendono gli stock, addirittura potrebbe andare alla fabbrica della BIC. Stimola tanto l'argomentazione che la discussione, per questa cosa che dicevo di come funziona il commercio, che nemmeno io lo so» (Filippo e *Il commerciante*).

3° aspetto: ci sono problemi che, più di altri, sono considerati inclusivi, in quanto danno la possibilità agli allievi di utilizzare vari tipi di strategie didattiche:

«Un problema che non ha numeri la sollecita la discussione, perché tu devi trovare una strategia; a me è venuta quella della sovrapposizione, ma magari a un bambino viene in mente un'altra strategia, che è diversa da quella aritmetica. Mi sembra abbastanza semplice; dovrebbe essere accessibile anche al bambino che ragiona di meno» (Serena e *Il Giardino di Torquato*).

«Hanno fatto ipotesi anche quelli che non ci arrivano; hanno detto di tutto e di più. Noi accettiamo tutto. Questo è lo scopo: di stimolarli comunque a discutere e ad intervenire. In questo senso i nostri sono abbastanza sicuri. Facciamo sempre questa "pedagogia del non timore" e viene fuori di tutto e di più (Caterina e *Il giardino di Torquato*).

4° aspetto: per una parte dei docenti, i problemi che stimolano particolarmente discussione e argomentazione possono essere proposti solo ad alcuni bambini; la maggior parte degli alunni della propria classe non riuscirebbe mai ad arrivare alla soluzione.

«Questo è un problema che io proporrei, però non a tutta la classe, perché io ho la presenza di un portatore di handicap, la presenza di due DSA gravi e ci sono anche bambini che non hanno queste attenzioni per il ragionamento. Io lo proporrei a un gruppo della classe omogeneo. Questo lo vedo adatto a bambini che riescono a trovare quelle strategie "diverse"» (Ludovica e "*Le monete*").

7.2.4. .Problemi e libri di testo

Si affronta in questa ricerca una questione molto delicata e importante: i problemi presenti nei libri di testo. Spesso accade che, pur dichiarando il rispetto delle Indicazioni Nazionali per il curricolo, editori e autori seguano di fatto altre strade, più orientate a riprodurre una didattica di tipo tradizionale. Considerando anche che molti docenti danno molta importanza ai libri di testo, anche per ragioni pratiche e di condivisione con i colleghi, appare di particolare importanza poter acquisire le convinzioni che i docenti hanno in proposito.

Per poter rispondere alla sottodomanda specifica presentata nel § 5.2., pp. 90-91, che riguardava la valutazione dei docenti sui problemi dei libri di testo, è stato chiesto ai docenti, nel corso dell'intervista:

- *Sei soddisfatto/a dei problemi proposti sui libri di testo? Motiva la tua risposta.*
- *Quali suggerimenti daresti ai responsabili di una casa editrice per migliorare i problemi proposti sui libri di testo?*

Le risposte dei docenti alla prima delle due domande sono state classificate a posteriori, individuando alcuni "punti di vista" suggeriti dai contenuti delle risposte stesse:

- il punto di vista del docente esperto in matematica;
- il punto di vista del docente che riflette sull'utilità delle proposte per il proprio lavoro;
- il punto di vista dell'insegnante che "si mette nei panni" degli alunni;
- il punto di vista del docente professionista, che valuta l'aderenza dei problemi presenti sui libri di testo a problemi "ideali" che abbiano le caratteristiche auspicate nei documenti istituzio-

nali, in particolare nel testo delle Indicazioni Nazionali per il curricolo.

La classificazione effettuata è riportata nella tabella 4.

Dal punto di vista del matematico	**Dal punto di vista dell'utilità pratica**	**"Nei panni" degli allievi**	**Aderenza ai documenti istituzionali**
Stimolano poco la logica	Semplificano il lavoro	Linguaggio non vicino ai bambini	Non in linea con le IN
Sono esercizi e problemi standard	Sono pochi	Banali	Non utili per la certificazione delle competenze
Sono classificati per argomento: moltiplicazioni, divisioni, ecc.	Si devono integrare con altri reperiti da siti o altri materiali cartacei	Noiosi e ripetitivi	Non stimolano il ragionamento
Non ci sono giochi matematici né test Invalsi	Devono essere modificati	Testi poco chiari	
	Ogni insegnante si regola a modo suo	Troppo semplici o troppo complicati.	

Tabella 4: I problemi nei libri di testo (cosa ne pensano i docenti

Le risposte dei docenti alla seconda delle due domande sono state classificate, sulla base delle stesse categorie già citate, nel modo indicato in tabella 5:

Dal punto di vista del matematico	**Dal punto di vista dell'utilità per il docente**	**"Nei panni" degli allievi**	**Aderenza ai documenti istituzionali**
Inserire problemi aperti e senza soluzione	Inserire pochi problemi ma buoni	Spazio alla creatività e a modelli intuitivi diversi	Inserire problemi più autentici e legati al reale, vivibili, concreti, legati ai tempi, al contesto dei bambini
Inserire problemi storici	Affiancare guide per i docenti dove si danno proposte e anche soluzioni	Inserire problemi giocosi, giocati, creativi	Non dare delle regole di risoluzione ai bambini, per permettere di lavorarci con il loro ragionamento
Proporre prove simil-Invalsi	Gli autori sono gli esperti	Far fare ai bambini cose in pratica	Inserire esercizi ma anche problemi che stimolano il ragionamento
Differenziare i problemi sullo stesso argomento	Arricchire i testi	Inserire problemi legati a vocaboli semplici, per ceti bassi	Inserire problemi stimolanti, che diano modo di conversare
Inserire problemi di vari livelli e gradi di difficoltà	Dare agli insegnanti degli spunti per costruire problemi ad hoc, in situazione	Dare la possibilità di uno o più steep: un bambino arriva ad un punto, un altro bambino ad un altro	

Tabella 5: I problemi nei libri di testo (quali problemi propongono i docenti)

Analizzando le tabelle e tenendo conto dei dati acquisiti, grazie a un'analisi ulteriormente approfondita dei testi delle risposte, si possono effettuare le seguenti considerazioni:

1. I problemi dei libri di testo non soddisfano la maggioranza degli insegnanti, per quanto riguarda aspetti che sono riferibili a questioni più prettamente matematiche; sono pochi, non rispondono ai bisogni degli

allievi e non sono in linea con i documenti istituzionali, nello specifico con le Indicazioni Nazionali per il curriculum.

È chiaro che i diversi aspetti citati sono in relazione tra loro: ad esempio, laddove si chiede di inserire problemi che siano "giocosi, giocati, creativi"ci si riferisce ai bisogni dei bambini, ma anche ad aspetti matematici e all'aderenza alle Indicazioni Nazionali.

2. Gli insegnanti mostrano di essere abbastanza consapevoli delle differenze che ci sono tra" *esercizi"* e *"problemi"*, ma sono pochi coloro che mostrano di conoscere la letteratura di riferimento e di averne fatto oggetto di riflessione professionale, individualmente o a scuola. Molti insegnanti lamentano la presenza massiccia, nei libri di testo, di esercizi, utili per verificare l'acquisizione di regole apprese in aula, piuttosto che di problemi, che possono mettere in gioco: ragionamento, vari modelli intuitivi, creatività degli allievi.

3. Per quanto riguarda le caratteristiche specifiche che i problemi dovrebbero avere, si insiste molto su quanto i problemi siano noiosi, ripetitivi, a volte banali, espressi in un linguaggio poco vicino ai bambini e poco chiaro. Per questi ultimi aspetti, indicati al punto 2 e al punto 3, i problemi proposti dai libri di testo non sono ritenuti in linea con il testo delle Indicazioni Nazionali.

4. Per quel che riguarda gli aspetti più prettamente pratici per il lavoro in aula, gli insegnanti intervistati si ritengono soddisfatti, perché hanno la possibilità di avere dei materiali da utilizzare, anche se spesso devono integrarli con altri problemi oppure sono costretti a modificare i testi proposti, per renderli più chiari o più significativi. Alcuni insegnanti credono che siano proprio gli autori dei libri i veri esperti e dunque non se la sentono di proporre alcun cambiamento, riponendo negli autori assoluta fiducia.

5. Gli insegnanti intervistati si mostrano molto propositivi e creativi, nel momento in cui sono invitati a dare consigli ai responsabili di una casa editrice sul come migliorare le proposte sui libri scolastici e parascolastici; essi utilizzano, nel definire i problemi "desiderati", tanti aggettivi che fanno riferimento a concetti importanti presenti nelle Indicazioni Nazionali: "autentici", "legati al reale", "vivibili", "concreti", "legati ai tempi", al "contesto dei bambini", "giocosi","giocati", "creativi". Tali aggettivi evidenziano le aspettative ed i bisogni dei docenti di avere

a disposizione problemi "diversi" per i loro allievi. Gli insegnanti insistono anche sulla necessità che si curi maggiormente la chiarezza dei testi, anche per favorire l'accessibilità ai problemi da parte dei bambini di ceto basso, curando sempre però di non cadere nella banalità.

6. Alcuni insegnanti manifestano il bisogno di avere a disposizione problemi che rassicurino gli alunni (e forse loro stessi): problemi a step, per esempio, oppure graduati, che prevedano diversi gradi di soluzioni, dalla più facile alla più difficile. Tali problemi darebbero ai bambini la possibilità di essere gratificati dal raggiungimento di un risultato, anche se solo ai primi livelli di difficoltà. Tali problemi darebbero anche modo ai docenti di monitorare i livelli di competenza raggiunti dai loro allievi.

7.3. Convinzioni degli insegnanti e Indicazioni Nazionali

Da diversi anni nelle scuole sono attivi gruppi di lavoro sulla costruzione dei curricula verticali, dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria. L'obiettivo prioritario di tali curricula è quello di favorire la formazione delle competenze degli allievi, tenendo conto del loro sviluppo ontogenetico (Loiero e Spinosi, eds., 2012, p. 83).

Nell'elaborazione di tali curricula i docenti si riferiscono al documento delle Indicazioni Nazionali del 2012.

> «Il testo delle Indicazioni riflette le più avanzate pratiche della scuola attuale e, utilizzando un lessico noto ai docenti, li stimola a ripensare il proprio ruolo di professionisti chiamati a formare allievi che devono vivere nella società odierna in maniera attiva e responsabile»(Loiero e Spinosi, 2012, p. 15).

Ma siamo davvero sicuri che il lessico delle Indicazioni sia così noto e condiviso dai docenti? Al fine di contribuire a sciogliere questo dubbio, è stata posta, nell'ambito dell'intervista, la seguente domanda ai docenti

D2. Quali sono le convinzioni che gli insegnanti hanno sulle Indicazioni Nazionali?

Per poter rispondere a questa domanda, sono state individuate le seguenti sottodomande:

2a. *Per progettare il loro lavoro sui problemi, gli insegnanti tengono conto delle Indicazioni Nazionali? Quali parti utilizzano? Quali parti trascurano? Come spiegano le loro risposte?*

2b. *Quali concezioni hanno gli insegnanti di alcuni concetti chiave presenti nel testo delle Indicazioni Nazionali (discussione, argomentazione, contesto significativo legato alla vita quotidiana)?*

7.3.1. Le Indicazioni Nazionali e la progettazione sui problemi

I risultati presentati in questo paragrafo rispondono alla domanda di ricerca riguardante la relazione tra gli obiettivi di insegnamento che ispirano la pratica didattica dei problemi e il testo delle Indicazioni Nazionali per il curriculo. Nell'intervista sono state poste ai docenti le seguenti domande:

-Nella progettazione delle tue attività sui problemi, tieni conto delle Indicazioni Nazionali per il curriculo? Sì No.

Se hai risposto Sì, indica quale/i parte/i delle Indicazioni utilizzi per progettare attività sui problemi. Spiega il perché.

I contenuti delle risposte date dai docenti, analizzati e classificati; sono rappresentati nello schema presente in figura 11:

Figura 11. Uso delle Indicazioni Nazionali da parte dei docenti

L'analisi del contenuto, relativamente alle abitudini di uso dichiarate del documento delle Indicazioni, evidenzia i seguenti aspetti:

1° aspetto: ci sono insegnanti che dichiarano di conoscere le Indicazioni, ma di fatto non le applicano nel quotidiano. In questi casi il testo delle Indicazioni è ritenuto troppo lontano dalle esigenze reali e dai bisogni degli alunni; gli insegnanti danno più valore alla loro esperienza didattica, che permette meglio di trovare le «strade giuste». Si riportano, in qualità di esempi, alcune risposte dei docenti:

«*L'ho letto ovviamente (il testo delle Indicazioni) e ne tengo conto. Però spesso valuto anche quali sono le loro necessità, cosa in questo momento hanno bisogno di comprendere. Spesso e volentieri (le Indicazioni) sono troppo teoriche, non sono calate al contesto, le dobbiamo in qualche modo applicare. E le applichiamo certo, non è che non le applichiamo. Però delle volte abbiamo bisogno di applicarle con modalità diverse rispetto a quello che invece dovrebbe essere*» (Giorgia).

«*Io ho letto le Indicazioni, ma non è che quando vado a fare un'attività le vado a guardare. Forse è anche una questione di abitudine. Comunque un problema deve essere adattato. Le Indicazioni le so quasi a memoria, ma poi di fatto non uso quello che viene detto*» (Elisabetta).

«*Ti dico la verità, con la mia esperienza non serve. A volte faccio le dimostrazioni pratiche. Le guardo, le leggo; qualche volta potrebbero essere anche uno spunto, ma io vado molto più sul pratico. Non tutti sono sullo stesso livello*» (Anna).

2° aspetto: ci sono poi docenti che dichiarano di aver letto il testo delle Indicazioni Nazionali e riconoscono di aver ricevuto i seguenti input, soprattutto dal testo della premessa alla Matematica del primo ciclo, presente nelle Indicazioni:

- strumenti metodologici da usare in aula: lavoro di gruppo, laboratori concreti, strategie e ogni altro strumento che il bambino possa avere a sua disposizione;
- competenze da sviluppare: uso della logica, astrazione, capacità di ragionamento, discussione, argomentazione, capacità di sviluppo in contesti diversi;
- tipi di problemi da scegliere: alternanza di problemi ed esercizi e problemi significativi legati alla vita quotidiana;

- indicazioni procedurali: ricerca dei dati utili, individuazioni delle informazioni più rilevanti, rappresentazione con i grafici, controllo dei risultati e dei procedimenti risolutivi;
- indicazioni su aspetti organizzativi, come l'importanza del laboratorio e del lavoro di gruppo collaborativo per poter costruire "insieme" i processi risolutivi.

Di seguito, riportiamo le parole dei docenti:

«Certo. Tengo conto del fatto che per risolvere dei problemi le Indicazioni ci dicono che l'alunno deve essere in grado di utilizzare tutti i mezzi a sua disposizione e di potere applicare e utilizzare tutte le strategie, come è scritto nella premessa, È importante far capire al bambino che gli strumenti che padroneggia sono utili per risolvere qualsiasi problema » (Ilaria).

«*Nelle Indicazioni c'è questa cosa che i problemi devono partire della realtà concreta dei bambini.[…]. La parte che utilizzo di più è quello che riguarda le motivazioni per cui i bambini devono affrontare situazioni di problem solving. Io alterno esercizi e problemi. Ora stiamo parlando solo di problemi, vero? Nelle Indicazioni c'è questa cosa che i problemi devono partire della realtà concreta dei bambini. Per cui è quello, no? Deve essere qualcosa che riguarda la loro realtà, altrimenti che gli importa a loro di risolverli? La parte che utilizzo di più è quella che riguarda le motivazioni per le quali i bambini devono affrontare situazioni di problem solving»* (Marta).

«Le Indicazioni parlano di argomentare, di spiegare, di sviluppare le capacità logiche, di sviluppare in altri contesti, diversi da quello scolastico, Cerco di tenerne conto; però bisogna andarli a pescare i problemi, eh, che rispondono a quelle Indicazioni… Ci sono i problemi, ma sono i "classici" problemi. Le Indicazioni parlano di argomentare, di spiegare, di sviluppare le capacità logiche, in contesti, diversi da quello scolastico» (Stella).

«*Sì, certo. Utilizzo di più la premessa, perché parla molto della motivazione, del fatto di avere la concretezza e di motivarli dal punto di vista laboratoriale»* (Laura).

«Sì, certo. Diciamo che non dicono tantissimo sui problemi. Troviamo qualcosa dove dice: controllare i risultati e il procedimento risolutivi» (Alba).

«In pratica in esse si parla della risoluzione di problemi che devono essere intesi come questioni autentiche e significative legate alla vita quotidiana e non come ripetizione di regole» (Lorena).

«Ma sì, ne abbiamo tenuto conto, all'inizio, ormai in una programmazione dello scorso anno, di due anni fa e abbiamo preso proprio questo aspetto della condivisione, del rapporto, del lavoro di gruppo» (Silvia).

3° aspetto: ci sono insegnanti, infine, che ammettono di non utilizzare le Indicazioni Nazionali, e ne spiegano le ragioni:

«*Sinceramente no. Non mi interesso»* (Concetta).

«No. Perché io faccio per come ormai sta nell'esperienza mia. Mi fido più di questa» (Serena).

«Quasi mai. Non so perché. Io vado a leggere il curricolo, ma poi vado a ruota libera. Forse perché vado a sondare di più la situazione nella mia classe» (Ornella).

«No. Perché spesso non è chiaro, per i bambini è difficoltoso»(Beatrice).

L'analisi del contenuto, che mira a sondare a quale/i parte/i delle Indicazioni Nazionali i docenti fanno più riferimento nella progettazione della attività sui problemi, rivela che ci sono docenti che considerano la premessa alla matematica del primo ciclo come la parte delle Indicazioni Nazionali più ricca di contenuti significativi, dal punto di vista pedagogico e didattico, così come è emerso nelle dichiarazioni precedentemente citate dei docenti.

Tuttavia, nella stragrande maggioranza, i docenti dichiarano di consultare la parte delle Indicazioni dove sono elencati i traguardi di competenza e gli obiettivi specifici di apprendimento, in quanto sono utili per stilare la progettazione didattica e il curricolo verticale di scuola.

Continuando la nostra analisi, si evidenziano a questo punto i limiti che i docenti riscontrano nel documento delle Indicazioni Nazionali del 2012.

«Spesso non è chiaro; per i bambini è difficoltoso applicare ciò che ci è scritto» (Beatrice).

«Troppo teoriche (le Indicazioni), non calate nel contesto» (Giorgia).

«*Non dicono tantissimo sui problemi*» (Alba).

«Gli obiettivi non sono esaurienti» (Marcella).

«È troppo generico ciò che è scritto sui problemi, va calato nella realtà» (Vittoria).

Si riscontra, infine, che ci sono docenti che dichiarano di non usare le Indicazioni per la progettazione del loro lavoro sui problemi, ma altre fonti: materiali messi a disposizione dalle case editrici o acquistati autonomamente, libri di testo, corsi di formazione su metodi specifici (Bortolato), nella convinzione che essi possano ben rappresentare ciò che è scritto nelle Indicazioni Nazionali:

«*Ritengo molto più valide le Indicazioni dell'85, che si chiamano programmi, perché secondo me spingevano gli insegnanti a impostare tutta la programmazione didattica attraverso problemi, lavorando nella zona di sviluppo prossimale***.** *Sono rimasta affettivamente molto legata a quelle. .. E ho seguito Mario Ferrari al Centro Morin*» (Delia).

«*Noi utilizziamo le Indicazioni provinciali. A volte la provincia ci obbliga a fare ricerca e a stabilire degli obiettivi di passaggio da un ordine all'altro di scuola. La nostra ricerca si svolge anche nei Dipartimenti di matematica. A volte vogliono degli obiettivi finali alla fine della scuola primaria che si raccordano con quelli della scuola media***»** (Iacopo).

«*Io ultimamente sto usando il metodo intuitivo- analogico che rispetta le Indicazioni Nazionali***.** *Quindi direi di sì*» (Sandra).

«*Eh, sì. Gli obiettivi diciamo che sono quelli che uno segue un po' sui libri di testo.* (Daniela).

«*Non mi sono utili; le utilizziamo a scuola per fare la progettazione, ma io utilizzo altri strumenti: guide e altro*» (Prisca).

7.3.2. Analisi dei significati di alcune parole delle Indicazioni Nazionali: discussione, argomentazione, contesto autentico e significativo legato alla vita quotidiana.

Nel primo capitolo di questo lavoro, al § 1.4.4., pp. 41-48, si è trattato di come, a partire dal pensiero di Vygotskij, sia stata sempre più considerata l'interazione sociale come un punto focale per la nascita e lo sviluppo dei processi cognitivi, e sempre più si sia cercato di trasporla nel contesto scolastico.

Si parla molto di discussione, ma bisognerebbe precisare bene le condizioni che rendono produttivo, dal punto di vista cognitivo, questo particolare tipo di scambio. Sia Pontecorvo et al., (2004), che Bartolini Bussi, Boni (1995), nel campo specifico della matematica, hanno teorizzato sulla discussione.

Nello spingere avanti il discorso, e per giustificare il proprio punto di vista, il pensiero procede attraverso asserzioni che determinano una presa di posizione, un esprimersi pro e contro, attraverso esempi di ragioni e giustificazioni, e così si introduce quel delicato processo che è l'argomentazione.

Nel lessico del testo della premessa delle Indicazioni Nazionali sono presenti sia la parola "discussione" che la parola "argomentazione"; ma quali sono i significati che, in modo implicito o esplicito, i docenti lettori del testo ministeriale danno ad essi? I loro significati sono in linea con quelli presenti in letteratura? E se non lo sono, quali sono le differenze?

Intenso è stato, ed è, in questi ultimi anni il dibattito sulla centralità in didattica dei "compiti di realtà" e dei "compiti autentici". Nella premessa si parla di contesto "autentico", significativo","legato alla vita quotidiana", inserendo in un'unica proposizione tre concetti densi di significati.

Al fine di indagare sui significati attribuiti dagli insegnanti a queste parole "chiave" delle Indicazioni Nazionali, sono state poste due domande nel corso dell'intervista, legate alla sottodomanda di ricerca 2b, riportata a p. 132 e che indaga quali sono le concezioni che gli insegnanti hanno di alcuni concetti centrali presenti nel testo delle Indicazioni Nazionali. Le domande presenti nell'intervista sono le seguenti:

1. *Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto che è importante che l'alunno discuta e argomenti le proprie scelte. Valuta in quale grado il problema (…) sollecita negli alunni, secondo te, la discussione e l'argomentazione, su una scala di punteggi compresi tra 4 e 1, dove 4 rappresenta il massimo grado di accordo e 1 il minimo grado di accordo?*

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta……………………………………… …………

2. *Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto: «[…] caratteristica della pratica matematica è la risoluzione dei problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana. Valuta in quale grado il problema (…) propone, secondo te, un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado di accordo e 1 il minimo grado di accordo?*

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta...

Le due domande sono state poste ai docenti per ciascuno dei sette problemi proposti, al fine di far emergere, alla luce delle precedenti riflessioni, le loro convinzioni sulle seguenti parole chiave presenti nella premessa delle Indicazioni: discussione, argomentazione, contesto autentico e significativo legato alla vita quotidiana. Gli insegnanti hanno risposto facendo riferimento ai sette problemi, e quindi non formulando definizioni astratte dei termini.

L'analisi del contenuto delle risposte ha evidenziato che sono diversi i significati che i docenti attribuiscono a ciascuna parola chiave.

Nonostante i due termini discussione e argomentazione siano stati inseriti in una stessa domanda dell'intervista, riprendendo così la parte di testo presente nella premessa delle Indicazioni, l'analisi dei significati attribuiti alle due parole è stata effettuata separatamente.

Le risposte sono state organizzate, per la presentazione dei risultati, sulla base di due categorie scaturite a posteriori:

1. significato del termine discussione, in relazione ai diversi problemi analizzati;
2. tipologie di problemi che possono sollecitare la discussione.

La discussione, nelle convinzioni dei docenti intervistati, assume i seguenti significati:

a) è una modalità di lavoro che può permettere ai bambini di arrivare alla soluzione del problema, soprattutto quando è di difficile risoluzione, in quanto gli allievi hanno l'opportunità di aiutarsi vicendevolmente, con la mediazione dell'insegnante.

«Si discute quando si lavora in gruppo con i problemi, perché dove non arriva uno può arrivare l'altro» (Giorgia, nell'analisi del problema *Le monete*).

«[…] La discussione nasce dove i bambini incontrano difficoltà» (Ludovica, nell'analisi del problema *Gli alunni di Anna*) .

«*Quando parlo di discussione con tutta la classe non intendo il gruppo strutturato da me, diciamo che si scelgono loro. Comunque io faccio lavorare un po' tutti con tutti […]. Nella discussione collettiva si confrontano. Io ascolto quello che pensano loro, registro le varie risposte, li indirizzo verso la soluzione giusta. Poi ne propongo altri simili e* *possono affrontarli individualmente*» (Daniela, nell'analisi del problema *Rocco e il suo giardino*).

«*Mi piace molto la discussione con tutta la classe, a me piace tantissimo, perché permette il confronto tra le eccellenze, quando ci sono, in diretta. Perché va benissimo il lavoro in gruppo, tutto va bene, pur di lavorare, di far qualcosa; però la discussione in classe dà modo anche di analizzare un intervento che non va bene. Io registro tutto alla lavagna: bla bla, ok, questo non va bene, ma perché non va bene? Io ho il ruolo di conduttrice: io tiro le fila, ma devono essere loro che vanno avanti; il problema è loro. Io sistemo tutto quello che esce, io lo devo collocare, schematizzare, sistemare; devo dare un significato a quello che esce. Poi sotto, scusa se passo sotto, al ruolo: io tutti quei punti riesco a toccarli; perché così io posso dire: ok, adesso bambini, lo avete capito; risolvetelo a casa* (Teresa, nell'analisi di *Rocco e il suo giardino*).

«Soltanto se trovano qualche difficoltà, allora chiedono e si sollecita una discussione, ma questo non è molto complicato» (Sara, nell'analisi del problema *Rocco e il suo giardino*).

b) La discussione può favorire la ricerca della soluzione di un problema da parte dei bambini che, confrontandosi nel gruppo eterogeneo, mettono in campo diverse strategie, comunicando e argomentando. La discussione, in questo caso, dà molto valore al processo anziché al prodotto; diventa una palestra per pensare e permette a tutti di esprimere i propri pensieri, in un ambiente dove vige una "pedagogia nel non timore". Si riportano alcune risposte dei docenti.

«Questo problema sollecita le strategie da usare per risolverlo. Perché i diagrammi a blocchi, no. E quindi mi immagino… incominciano a dire: "Come facciamo", e cominciano a disegnare Piero e Francesco, e sotto ognuno ci fanno i panini. Quindi sicuramente quello che stimola molto questo problema è la ricerca di strategie risolutive». (Serena, nell'analisi del problema *Le monete).*

«Lo vedo molto realistico, perché può succedere benissimo di lavorare in una mostra; è successo. Potrei darlo anche come lavoro di classe, come discussione di classe, ma proprio per trovare la strategia su come poter meglio tappezzare quest'aula. Trovare le forme da mettere, le posizioni. Potrebbe essere un modo per far partecipare tutti a questo problema» (Ludovica, nell'analisi di *Una mostra in aula*).

«Assolutamente sollecita, perché le risposte sarebbero le più svariate. La discussione in classe sarebbe accesa. Uscirebbe di tutto. C'è il bambino più attento che magari, pri-

ma di dare una risposta aspetta: "Provo e ragiono", E ci sarebbe il bambino che dà una risposta anche senza riflettere. Però penso sia utile comunque, un po' perché "scontrandosi" con la realtà, che è il contrario di quello che hanno detto, restano un po' anche delusi, e quindi è come una sorta di esperienza e pensano: la prossima volta prima di rispondere a caso, rifletto. E anche perché alcune volte sono convinti della risposta che danno, e quindi magari nella loro mente c'è stato anche un ragionamento, e quindi danno una risposta sbagliata e poi vengono portati a capire che il loro ragionamento era sbagliato» (Vittoria, nell'analisi del problema *Gli alunni di Anna*).

«*Qui c'è da discutere tanto. Ritengo che i bambini qui ci proverebbero, anche quelli che capiscono poco e niente o magari che in un altro contesto si bloccherebbe per paura di dire la cosa sbagliata. Qui invece ci proverebbero per dimostrare la loro ipotesi: perché un rettangolo è una figura conosciuta; si sentono abbastanza tranquilli. Diciamo che verrebbero fuori le loro idee; insomma proverebbero*» (Isabella, nell'analisi del problema *Il rettangolo*).

«Questo è un problema che presuppone veramente una grossa capacità di discussione, di argomentazione, di trovare una risposta che sia convincente, di saperla spiegare, motivare, esporre ai compagni e infatti è una cosa sicuramente stimolante o a livello di classe o per gruppi eterogenei. Specialmente le prime volte in cui devono essere anche guidati. Se il gruppo si ferma, l'insegnante può sollecitare con la domanda giusta e guidarlo un poco (Stella, nell'analisi del problema *Le monete*).

«*Sicuramente sarebbe di stimolo a coloro che non intervengono mai; sarebbe di stimolo per dare la propria opinione in un contesto coinvolgente*» (Pina, nell'analisi del problema *Le monete*).

c) La discussione, per altri insegnanti, è una modalità di lavoro che può coinvolgere solo un gruppo di bambini, escludendo altri più "deboli".

Ecco alcune dichiarazioni dei docenti:

«*Allora, secondo me, loro su questo s'ammazzerebbero. Nel senso che tutti direbbero la loro, probabilmente senza comprendere il vero senso del problema. Quindi potrebbe suscitare discussione; io metterei proprio 4. Non tutti arriverebbero. Perché ne ho due o tre che sono molto in gamba. Uno in particolare arriverebbe da solo a comprenderlo. Però allo stesso tempo ho la bilancia dall'altra parte, dei bambini che sono DSA e che non riuscirebbero assolutamente a cimentarsi in un problema del genere*» (Giorgia, nell'analisi del problema *Le monete*).

«Servirebbe ad attivare la logica e la discussione. Quindi si potrebbe proporre come discussione con tutta la classe. Per gruppi eterogenei però no, perché secondo me solo i bambini che hanno una maggiore capacità di logica potrebbero arrivare a confutare il problema. Gli altri si accoderebbero» (Irene, nell'analisi del problema *Le monete*).

«In quelli più pronti, più intelligenti farei di più, 4, (il massimo punteggio). Negli altri quasi niente (sorride)» (Concetta, nell'analisi del problema *Gli alunni di Anna*).

*«[…] Devo considerare il fatto che non tutti sono allo stesso livello, e devo considerarli… (*Anna, nell'analisi del problema *Rocco e il suo giardino*).

«[…] Questo è un bel problema, mi piace. Però alcuni, un buon numero, avrebbero da parlare a tutto spiano; altri invece, vedo già i visetti, vedo un bel gruppettino, non avrebbe da spiccicare una parola; non ce la fa…» (Teresa, nell'analisi del problema *Una mostra in aula*).

«Devo considerare il fatto che non tutti sono allo stesso livello e devo considerarli» (Anna, nell'analisi del problema *Rocco e il suo giardino*).

d) In altri casi la discussione è intesa come un'attività che permette di esercitarsi nella ricerca della soluzione anche di un problema esercizio; si tratta di un'attività simile al parlare, al conversare, per chiarire termini o altri dubbi emergenti.

«Io ti rispondo sempre 4. Per me dipende da come lo poni. La discussione nasce: perché il commerciante, che cosa fa; perché la metà; poi il prezzo unitario, il prezzo totale. C'è di tutto e di più». (Caterina, nell'analisi del problema *Il commerciante*).

«4. Perché è veramente reale. Non è astratto. Li fa parlare, anche perché io spesso metto degli euro sul banco. Loro possono costruire per esempio tra di loro. Chi fa il commerciante, compra la frutta quanto la vende, tra di loro» (Beatrice, nell'analisi del problema *Il commerciante*).

«La discussione è ampia perché purtroppo loro non capiscono che un commerciante deve comprare anche lui, ci deve guadagnare; c'è tutta prima una discussione sul perché c'è la spesa, perché c'è il ricavo, perché c'è il guadagno. È vero che c'è la formuletta, ma in realtà loro non la vivono perché non sono commercianti» (Annabella, nell'analisi del problema *Il commerciante*).

«*4, il massimo. Perché devono comunque visualizzare delle immagini e quindi devono porsi più domande e darsi più risposte*» (Prisca, nell'analisi del problema *Rocco e il suo giardino*).

Lo schema della figura 12 mostra quali problemi sollecitano di più la discussione, sintetizzando i punti di vista dei docenti:

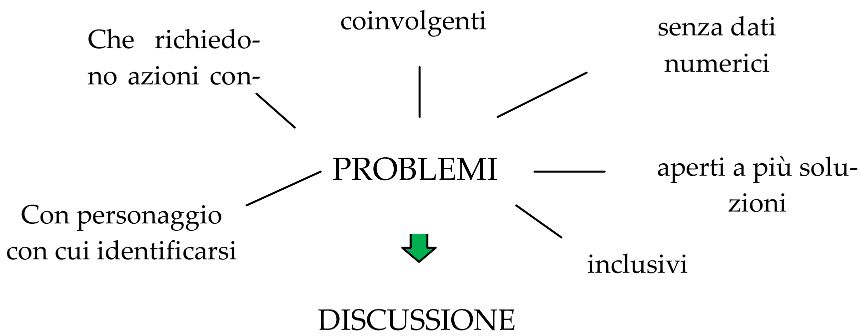


Figura 12. I problemi che stimolano la discussione

Dalle risposte dei docenti si evince che i bambini discutono maggiormente, quando si trovano ad affrontare problemi che hanno le caratteristiche sopra indicate, come per esempio: «*un problema che fa agire fa anche discutere*» (*Una mostra in aula*, compito di realtà); «*ci proverebbero, ma non ci sarebbe discussione perché è troppo lontano da loro*».

Un problema in cui il bambino ha la possibilità di identificarsi con un personaggio che deve trovare la soluzione, crea discussione, in quanto:

«*"Il rettangolo" è un problema bello […]. Mi obbliga a pensare; affettivamente è molto carino questo tipo di problemi. C'è un rapporto affettivo dei bambini con il protagonista. È molto importante. Tutte le volte in cui ci sono altri alunni che pongono la domanda, si crea un clima proprio affettivo, anche emotivo, se vuoi. Marco è un allievo, stai facendo un'affermazione e quindi entrano in empatia con lui e si chiedono: "Avrà pensato bene o avrà pensato male? Aspetta che ci ragiono un attimo anche io, bene o male*» (Delia).

Per quanto riguarda la discussione, quindi, sembrano emergere diversi significati; la definizione della discussione, così come è stata esposta a pagina 139, al punto b, sembra più somigliante alle teorizzazioni citate nelle pagine 136 e 137, mostrando tuttavia che gli argomenti portati dai docenti necessitano di ulteriore riflessione teorica e di sperimentazione, ai fini di un approfondimento del concetto di discussione e per una più ampia valorizzazione dal punto degli esiti cognitivi.

Procediamo ora ad analizzare i significati che gli insegnanti intervistati hanno attribuito al termine "argomentazione". Nelle risposte degli insegnanti l'argomentazione è stata a volte accostata alla discussione, altre volte è stata citata da sola.

C'è più discussione e argomentazione quando ci si trova di fronte a problemi difficili: «*È complesso come problema; sono costretti a fare ragionamenti connessi gli uni agli altri…*» oppure di fronte a problemi che coinvolgono gli alunni, al punto da suscitarne la partecipazione e farli intervenire: «*i bambini argomentano ciò che riescono a sperimentare e a comprendere*». Un problema che prevede discussione e argomentazione è di «*stimolo anche a chi non interviene mai perché dà la sua opinione in un contesto coinvolgente*».

Un insegnante parla di argomentazione guidata: «*I bambini vanno seguiti con argomentazione guidata da parte dell'insegnante, quando il problema è troppo difficile*». Ci sono alcuni dei problemi che più degli altri sollecitano l'argomentazione nei bambini: «*Al problema "Il giardino di Torquato" darei 4, perché ognuno deve mettersi in discussione con sé stesso e io chiederei a ognuno il perché mi ha dato una determinata risposta, chiederei di argomentarla*» (Pina).

Nel problema *Una mostra in aula* l'argomentazione «*si usa per sistemare i cartelloni*» e nel problema *Il commerciante: «c'è un po' di argomentazione, ma non è un'argomentazione; una volta che è stato risolto da qualcuno, costui non fa fatica a spiegare; è una situazione abbastanza lineare». Invece «per le monete e per i cartelloni è più elaborata. Come per il perimetro e per i fiori: può esserci una difficoltà di applicazione in più. Io l'argomentazione la vedo come qualcosa di più creativo; qui nel problema "Il commerciante" di creativo non vedo niente»* (Isabella).

Per Marta, invece, nel problema *Una mostra in aula*: «*L'argomentazione è legata alla realtà» e* nel problema *Il rettangolo*: «*L'argomentazione sarebbe alta: dovrebbero essere concetti che loro conoscono e quindi dovrebbero argomentare bene*». Per Iacopo: «*Quanto più sentono vicina a loro la questione che gli poni, più sono invogliati ad argomentare*». Per Sandra: «*Il problema "Una mostra in aula" è un problema che fa agire* (lo ripete due volte) *e l'azione por-*

ta all'argomentazione e all'apprendimento». Per Laura, riflettendo sul problema *Gli alunni di Anna*, dice: *«Se penso ai bambini con tanti problemi…chi ha difficoltà non entra nell'argomentazione; nella mia classe ¼ di 19 non sarebbero sollecitati, si chiuderebbero; io comunque ci proverei».* Per Ilaria nel problema *Rocco e il suo giardino, «[…] i bambini potrebbero argomentare la piantumazione come viene sistemata. Poi potrebbero fare un disegno» e nel problema Il rettangolo: «[…] trovano tante soluzioni, tante argomentazioni, anzi dimostrazioni del loro lavoro».* Per Teresa nel problema *Le monete*: *«[…] l'argomentazione sarebbe ok; uscirebbe veramente di tutto e di più e ricondurli ai concetti della matematica mi risulterebbe di una fatica inutile, dal mio punto di vista. Scarterei il problema».* Per Roberta, il problema *Le monete*: «*potrebbe essere uno strumento per costruire competenze: argomentare, tentare di arrivare alla soluzione matematica, utilizzando il linguaggio della matematica stessa*». Per Stella: «*Questo ("Le monete") è un problema che presuppone veramente una grossa capacità di discussione, di argomentazione, di trovare una risposta che sia convincente, di saperla spiegare, motivare, esporre ai compagni e infatti è una cosa sicuramente stimolante o a livello di classe o per gruppi eterogenei […] ».*

Gli insegnanti utilizzano il termine "argomentazione" in modo nettamente meno frequente rispetto al termine discussione, come mostra il risultato della query di word frequency, effettuata con il programma NVIVO 11 sul nodo "discussione e argomentazione", riportato in figura 13 e in tabella 6.

Figura 13. Word cloud: le parole più frequenti nel nodo "discussione e argomentazione"

Word	Lenght	Count
Argomentare	11	11
argomentazione	14	12
Dare	4	11
Devi	4	10
Devo	4	11
Difficile	9	17
Discussione	11	105
Discutere	9	16

Tabella 6. Summary: le 8 parole più frequenti nel nodo "discussione e argomentazione"

Nel Summary della tabella 6, si può prendere atto della maggiore frequenza delle due parole "discussione" (105 conteggi) e "discutere" (16 conteggi) nelle risposte degli insegnanti, rispetto ai due termini "argomentazione" (12 conteggi) e "argomentare" (11 conteggi). Per spiegare tale risultato si potrebbe ipotizzare che i docenti ritengano l'argomentazione ancora troppo lontana dalle consuetudini didattiche del grado di scuola in cui operano, a differenza della discussione che è un termine, invece, frequentemente utilizzato e accostabile a diverse modalità di interazione, come si è anche scritto nelle pagine precedenti. Ma si tratta di una questione che potrà essere approfondita con ricerche future.

Procediamo ora con l'analisi dei significati del terzo gruppo di parole, presenti nel testo della premessa delle Indicazioni Nazionali: "contesto autentico significativo, legato alla vita quotidiana". Anche queste parole assumono significati molto diversi nelle concezioni degli insegnanti, rispetto ai diversi contesti problematici.

Sono stati individuati due significati più importanti:

a. un "contesto legato alla vita quotidiana" è un contesto che serve ad affrontare una situazione che è utile per la vita presente e sarà utile per quella futura, sia dal punto di vista pratico che dal punto di vista dei valori morali ed esistenziali.

*«Un domani qualsiasi persona che dovrà fare due conticini per capire, non so, quanto ci vuole per fare un orto, come stiamo facendo adesso; quindi aiuta. "Io spesso dico: "Guardate ragazzi, questi problemi vi servono anche quando un domani deciderete di fare i muratori"»(*Concetta).

«A Rocco darei 4. Se parliamo di realtà, c'è. Per esempio in questo territorio molte case hanno il giardino. Quindi parecchi bambini si sono trovati e si trovano a fare lavori di giardinaggio. Pertanto è molto facile fare un confronto con l'esperienza reale» (Ilaria).

«A "Una mostra in aula" darei 4, Se vedo al loro futuro, diventeranno ingegneri e architetti» (Concetta).

«Questo è un contesto riflessivo (Le monete). È già qualcosa che presti ai bambini: l'aspetto valoriale. A me sembra che i bambini sono quelli che devono andare a scoprire…» (Iacopo).

b. Un contesto legato alla vita quotidiana è un contesto dove si effettuano attività manuali, artistiche, legato alle forme e ad altre attività concrete, come misurare, vedere, toccare, tagliare.

«Dipende da cosa intendo per quotidiano; io intendo la manualità dei bambini. È difficile anche dirlo, perché siamo anche noi talmente poco dentro gli aspetti pratici» (Filippo).

«Io li ho abituati a lavorare con tutti quelli che sono i lavori manuali e artistici. Quindi capire la differenza tra un foglio magari così, che se lo raddoppi non è che raddoppia all'interno, mi aiuterebbe. L'ho visto come una cornice; la cornice di un foglio e la parte interna sono completamente diverse. Se tu raddoppi la cornice, raddoppi la superficie» (Giorgia).

*«Il rettangolo,sì, perché hanno fatto tutte le misure dei banchi; legato alla vita quotidiana, perché tutto il mondo è fatto di forme […]» (*Nerina).

Una differenza fondamentale individuata dagli insegnanti è quella esistente tra i due termini "significativo" e "autentico", che nel linguaggio comune spesso si sovrappongono, ma che già in letteratura sono stati accuratamente distinti (Zan, 2016, p. 78). Un problema può essere significativo ma non autentico, quando mette in gioco le capacità dei bambini di acquisire competenze e conoscenze, in un ambiente di apprendimento che coinvolge processi cognitivi di un certo spessore. Tuttavia lo stesso problema può non rispondere ai bisogni del bambini, dunque non essere autentico, ossia non legato alla sua esperienza.

Nelle dichiarazioni dei nostri insegnanti, quali sono i significati che emergono rispetto a questi termini?

Di seguito, si riportano alcuni brani tratti dalle interviste di alcuni docenti che hanno particolarmente sottolineato le differenze tra due termini "autentico" e "significativo":

«Più che autentico, a me sembra significativo ("Le monete"). Significativo perché può avere un senso per loro, […]. Le scelte che uno fa, con quali intenzioni. Vedere come pesano le cose. Sono considerazioni che servono a campare» (Alba).

«"Il giardino di Torquato" non è molto autentico ma è significativo, per quanto riguarda la loro preparazione curriculare, mettendo in gioco le loro capacità di riuscire a trovare una soluzione vedendo le figure» (Giorgia).

«[…] Perché magari, se nella vita pratica e quotidiana non deve misurare i rettangoli, però può capire che non deve rispondere affrettatamente, senza aver verificato prima. Al di là di questo, non è che nella vita quotidiana a casa sua si mette a misurare i rettangoli. Però non è questo che è importante, ma la finalità, che attraverso questo si acquisisce una conoscenza scientifica» (Stella).

«Io per significativo intendo qualcosa che abbia a che fare con me stesso. Io sono portato a risolvere un problema perché è mio, perché mi interessa, non perché me lo abbia chiesto la maestra. Quindi nel significativo faccio scaturire il problema e tu lo risolvi perché ho bisogno della risposta. In questo caso è una richiesta, punto e basta. Quindi non possiamo stabilire a priori se un problema è autentico e significativo. Non puoi metterli su carta (tu autore) e io li uso così come sono. Piuttosto mi aspetto,così, degli spunti che io poi (insegnante) devo sviluppare […]» (Daniela).

In qualche caso l'insegnante mostra le sue incertezze nel definire e differenziare i significati dei due termini, mentre esprime e sviluppa il suo pensiero:

«Rocco ha un contesto autentico ma in realtà è poco significativo per i bambini: non è che loro si trovano realmente a dover…Sarebbe stato più autentico se fosse stato contestualizzato nel giardino di scuola o nella loro aula»(Giorgia).

In alcune situazioni ci si trova di fronte a significati opposti dati allo stesso termine, in riferimento a uno stesso problema:

«Il commerciante è molto significativo. È anche sempre un problema di esperienza e vita reale. Noi poi in questi giorni stiamo proprio parlando del commerciante: chi è, che fa. I bambini, devo dire, sono sempre stimolati. L'altro giorno sono andati dal fioraio con la mamma. Ha chiesto tutto: ma voi i fiori dove li prendete? Andate dal grossista? Al mercato generale? Quello è rimasto a bocca aperta. Quindi, da una discussione di classe, dall'esperienza, da un semplice problema… poi lo estendi» (Caterina).

«Direi. Il contesto è autentico, ma non è significativo per i bambini. L'incassare o il guadagnare non riguarda loro, è più legato al mondo esterno. Non è adatto all'età. Ci accorgiamo spesso che, quando facciamo i problemi di guadagno e incasso, la confusione all'inizio è veramente tanta. Si fa ricorso poi allo schema noto per poter arrivare a soluzione. La vedo più come qualcosa di statico, quella cosa lì che va fatta perché il bambino deve rapportarsi con questo. Vai a spiegare il guadagno. Per loro guadagno é riferito al fatto che il papa guadagna. Adesso sono quattro anni che non ho la quinta, ma se mi attengo ai miei ricordi, mi rendo conto che il discorso del guadagno è veramente duro» (Roberta).

7.4. Risoluzione dei problemi e teorie del successo

In questo paragrafo si presentano i risultati relativi alla terza domanda della ricerca posta:

-Quali convinzioni hanno gli insegnanti sulle cause e sul significato di successo dal punto di vista della risoluzione dei problemi matematici? Quali strategie ritengono che si possano mettere in atto per promuovere il successo dei buoni risolutori ?

Nell'intervista, sono state poste ai docenti le seguenti domande:

3a. Esistono, secondo te, alunni che sono buoni risolutori? Se hai risposto sì, quali elementi caratterizzano, secondo te, un alunno che è un"buon risolutore"?

3b. Può un insegnante aiutare un suo alunno a diventare un "buon risolutore"? Se hai risposto si, esponi cosa un insegnante, secondo te, potrebbe fare per aiutare un suo alunno a diventare un buon risolutore.

3c . Quali sono le difficoltà più frequenti che i tuoi alunni incontrano nei problemi?Cosa fai quando riscontri che qualche tuo alunno sta incontrando le difficoltà indicate nella risposta precedente?

Esponiamo di seguito, punto per punto, le risposte, analizzate e classificate, sempre con l'ausilio di NVIVO 11.

7.4.1. Il "buon" risolutore

I docenti intervistati hanno esposto le loro convinzioni sulle caratteristiche del buon risolutore, descrivendo, in alcuni casi, "tratti" che sono stati considerati "generali", in quanto non riferibili a comportamenti potenzialmente osservabili degli allievi; in altri casi tratti più "specifici", riferibili a competenze matematiche e non matematiche, ma anche a componenti affettive e motivazionali.

Di seguito, in figura 14, si mostrano alcuni quadri di sintesi, nei quali sono rappresentate classificazioni sulla base di categorie stabilite a posteriori, a partire dalle dichiarazioni che i docenti hanno effettuato nel corso delle interviste.

Tratti (generali)	**Competenze matematiche**
È intuitivo. È portato per la materia. Ha logica. Ha una buona immaginazione. Ha intelligenza verbale. Ha buone capacità. È portato per la materia. È intelligente. È pronto. È bravo. È sicuro. È pratico.	Padroneggia gli strumenti matematici acquisiti e li utilizza. Arriva al risultato con ragionamenti diversi. Sa visualizzare la situazione. Sa trovare strategie. Estrapola gli elementi chiave. È veloce nel rispondere. Appena legge, arriva la risultato con immediatezza. È veloce nell'applicare strategie. Analizza dati, li unisce graficamente, arriva alla soluzione.

Spirito di iniziativa e di imprenditorialità

Vede le cose da più angolature.
È capace di iniziativa.
Sa trovare strategie.
Ha capacità di mettersi in gioco.
Non si limita ad applicare la regola.
Non si perde.
È autonomo.

Imparare ad imparare

Ogni volta cerca di visualizzare la situazione.
Riflette su come fare.
Ha coscienza di quel che fa.
Capisce la situazione.
Si pone sempre perché.
Non si limita ad applicare la regola.
Non segue gli stessi schemi.
Applica la logica al di fuori degli schemi

Competenze linguistiche

Ha una buona proprietà di linguaggio.

Sa spiegare il suo ragionamento.

Aspetti motivazionali ed emozionali

Non si scoraggia finché non arriva alla soluzione.

Non ha paura di mettersi in

Figura 14: Le caratteristiche del buon risolutore

Come si evince dai quadri presentati in figura 14, sono state individuate le seguenti categorie, interpretative delle caratteristiche di un bambino considerato un "buon" risolutore:

- una categoria denominata di "tratti generali", con voci lontane da comportamenti oggettivamente riscontrabili;
- altre categorie considerate più "specifiche", con voci riconducibili a comportamenti che possono essere più facilmente "diagnosticabili", e che chiamano in causa alcune competenze europee: matematiche, linguistiche, imprenditoriali, imparare ad imparare (cfr. § 4.2, pp. 81-83).
- una categoria con voci attinenti ad aspetti strettamente emozionali e motivazionali (cfr. § 2.3, p. 58).

7.4.2. Le strategie degli insegnanti e i buoni risolutori

Gli insegnanti intervistati, nel rispondere alla domanda 3b, presentata nella pagina 148, hanno proposto molte strategie, potenzialmente utili per aiutare gli allievi a diventare buoni risolutori.

Tali strategie sono state acquisite, e poi classificate, sulla base di categorie costruite a posteriori. Di seguito si presentano i quadri delle classificazioni effettuate.

Insegnanti pessimisti	**A maglie larghe (aspecifiche)**
Non ci riesco. Il problema è veramente uno scoglio. Incide pochino. Per alcuni bambini non c'è niente da fare. Non so neanche se può e fino a che punto. Da una parte ci sono le conoscenze, dall'altra ci sono le capacità che ha lui. Sono proprie.	Guidare per far ragionare. Aiutare gli alunni a trovare i procedimenti e ad esserne consapevoli. Stimolare la logica e il ragionamento. Aiutarli a pensare. Dare un metodo che dura tutta la vita. Incanalare le loro capacità, ma non so come. Stimolare la loro curiosità.

A maglie strette con focus sui processi
Far analizzare il testo nei dettagli. Dare meno regole possibili: evitare le parole chiave e altre indicazioni. Far immaginare il testo, farlo disegnare, farlo rappresentare. Spronare la curiosità, andando oltre la parole. Stare attenti all'uso del testo e andare al di fuori del comportamento classico.

A maglie strette con focus sui prodotti
Far trovare la strada con le strutture. Offrire le strategie: trovare le parole chiave. Condurli alla soluzione con disegni ed esempi pratici. Aiutare i bambini in difficoltà con dei cartelli sui quali c'è scritto cosa devono fare: prima leggi il testo, poi vai a scindere parte del testo

A maglie strette con focus sull'organizzazione del lavoro

Farli lavorare in coppia perché si può rubare con gli occhi ma anche con la mente.

Si possono aiutare individualmente; nel gruppo è più difficile.

Utilizzare la discussione in classe: provano a pensarci

Farli esercitare in gruppo perché possano imparare dai compagni.

A maglie strette con focus sui problemi

Proporre problemi legati al reale (tagliare, fare…).
Dare problemi legati alla vita quotidiana.
Proporre problemi "strani" e non standard.
Alternare problemi come questi presenti nell'intervista con problemi semplici.
Proporre continuamente problemi di vario tipo.
Presentare classi, tipologie di problemi.
Proporre giochi matematici, in cui si mettono in gioco diverse strategie.

A maglie strette con focus sul contesto metodologico

Partire dalla realtà.

Lavorare sul concreto,
sul fare.

Aspetti motivazionali ed emozionali

Dare sicurezza ogni volta quando hanno un dubbio.

Mai dire: " Non sei capace di farlo".

Dargli fiducia: ascoltando e facendo

Figura 15. Le strategie degli insegnanti per i buoni risolutori

Leggendo le voci che sono presenti nei quadri delle classificazioni, si riscontra che ci sono docenti che propongono strategie definite "a maglie larghe" in quanto molto generali e generiche, che non si riferiscono ad atti o interventi ben definiti da parte degli insegnanti. Cosa vuol dire, per esempio, su un piano operativo, «*stimolare la logica e il ragionamento*»? Tali voci, dunque, non possono essere, così come sono state espresse, una guida all'interpretazione del comportamento di un docente in aula.

Ci sono poi le dichiarazioni di quei docenti che ammettono di non riuscire a ipotizzare strategie e che vanno dunque nella direzione di "annullare" le possibilità di intervento dei docenti: «*Da una parte ci sono le conoscenze che gli diamo noi, da una parte ci sono le capacità che ha lui. Sono proprie*»(Vittoria), e ancora: «*Per alcuni bambini non c'è niente da fare*». Gli insegnanti nemmeno ci provano, scelgono di rinunciare o dubitano fortemente di poter fare qualcosa di utile.

Di contro, ci sono docenti che propongono strategie più mirate, definite "a maglie strette", che fanno riferimento a comportamenti più circoscritti, per esempio: «dare meno regole possibili» oppure: «proporre giochi matematici».

A tali gruppi di strategie sono state attribuite specifiche denominazioni, in relazione agli aspetti che mettono in gioco di volta in volta: "processi", "prodotti", "problemi", "metodologie", "contesto", "organizzazione del lavoro".

Ci sono docenti, infine, che hanno messo l'accento sugli aspetti motivazionali ed emotivi.

7.4.3. ***Le difficoltà degli allievi nella risoluzione dei problemi***

Gli insegnanti intervistati, nel rispondere alla domanda 3c, presentata a pagina 148, hanno esposto le loro convinzioni rispetto alle difficoltà che più frequentemente gli allievi incontrano nel corso della risoluzione dei problemi matematici. Tali difficoltà sono state classificate sulla base di categorie scaturite a posteriori e mostrate nei quadri della figura 16.

Difficoltà "matematiche"	**Difficoltà "linguistiche"**
Mancata individuazione delle operazioni aritmetiche "giuste". Mancanza di ragionamento causata dalla disabitudine a ragionare. Scarsa capacità di ragionamento, intendendo tale capacità come: estrapolazione dei dati, lettura attenta, uso del diagramma di flusso. Difficoltà a trasformare le parole in pensiero astratto.	Comprensione del testo dal punto di vista letterario. Lunghezza del testo del problema. Mancata raffigurazione del problema. Difficoltà a capire il contesto.

Difficoltà "motivazionali"

Mancato interesse verso i problemi.

Non ci si mette in gioco per risolvere il problema.

Difficoltà "metacognitive"

Mancata consapevolezza di ciò che si fa.

Non si legge la consegna.

Figura 16. Le difficoltà degli allievi nei problemi

La lettura delle interviste effettuate evidenzia che i docenti individuano nella mancata comprensione del testo la difficoltà maggiore e più frequente degli allievi. I bambini non leggono con attenzione i testi dei problemi e sembrano lasciarsi distrarre da altro; la lunghezza di un testo può essere un elemento di disturbo (e ciò potrebbe anche spiegare le resistenze che molti docenti hanno manifestato nei confronti del problema "Le monete"). Ci sono bambini che non leggono la consegna, ma vanno a cercare direttamente i dati numerici, senza preoccuparsi di comprendere il contesto. A volte i bambini non sanno individuare l'operazione giusta (dunque mancano concetti di base dell'aritmetica). Accade anche che i bambini mostrano di non avere consapevolezza di ciò che fanno, non usano la "logica", non riescono a raffigurarsi il problema oppure non si mettono proprio in gioco per affrontare un problema. Esplorando il mondo delle difficoltà degli alunni nel risolvere problemi, si nota che entrano in gioco anche fattori che ci conducono in terreni più squisitamente psico-pedagogici (motivazionali, affettivi e metacognitivi).

7.4.4. Le strategie degli insegnanti per affrontare le difficoltà degli allievi

I docenti intervistati hanno manifestato un ricco repertorio di idee in relazione all'aiuto che un insegnante può dare ai suoi allievi nel superamento delle difficoltà incontrate nell'affrontare problemi matematici. Nella figura 17 di pagina 155 si presenta un'ulteriore classificazione. Sono state utilizzate, a questo scopo. alcune categorie già emerse nelle precedenti analisi, con riferimento ai prodotti, ai processi e al contesto metodologico.

Strategie attente ai prodotti

Aiutare, suggerendo qualcosa.

Far rivedere problemi simili.

Stimolare attraverso input (lettura, sottolineatura dati, diagrammi di flusso, diagramma a blocchi, individuazione dei punti chiave, evidenziazioni, sottolineatura della domanda).

Utilizzare cartelli sui quali sono scritti i passi per risolvere il problema.

Far capire che, se la quantità aumenta, sono coinvolte certe operazioni, se diminuisce sono coinvolte altre operazioni.

Condurre alla soluzione attraverso domande.

Strategie attente ai processi

Far immaginare la situazione.

Rileggere il testo e analizzarlo.

Far dire con parole proprie cosa dice il problema.

Strategie attente al contesto metodologico

Far affrontare i problemi in forma di gioco.
Far esperire la situazione.
Attivare la discussione in classe per facilitare il tutoraggio.
Far lavorare con un altro compagno.
Partire da immagini e da situazioni grafiche.

Figura 17. Le strategie dell'insegnante

La lettura dei dati presentati nella figura 17 induce le seguenti riflessioni: quando i docenti sono chiamati a ideare strategie per affrontare le difficoltà, non si limitano ad elaborare proposte "generali" o "generiche", ma pensano ad azioni didattiche più concrete. Di nuovo si possono distinguere strategie che mirano a lavorare sui processi (ne sono indicate poche) e strategie che mirano al raggiungimento del prodotto (sono di più).

Si potrebbe inferire che gli insegnanti si mostrino più inclini a cercare "terapie" piuttosto che ad effettuare "diagnosi" che li possano mettere effettivamente in condizione di affrontare, comprendere, trovare vie risolutive più efficaci e profonde per affrontare i problemi risolutivi degli allievi.

Nelle dichiarazioni dei docenti c'è attenzione anche agli aspetti metodologici: gli insegnanti scelgono di meno di attuare interventi diretti e verticali e sono invece più propensi a favorire scambi cooperativi tra gli allievi.

7.5. Le emozioni degli insegnanti

A conclusione dell'esposizione sull'analisi dei dati e della loro interpretazione, si riporta di seguito l'ampio ventaglio di emozioni che i docenti hanno dichiarato di provare, quando si trovano a dover affrontare le difficoltà degli allievi. Nell'intervista era presente la seguente domanda specifica:

-Come ti senti quando i tuoi alunni incontrano difficoltà nel risolvere un problema?

Di seguito si presenta l'elenco degli stati d'animo e delle emozioni espresse dai docenti:

1. Dispiacere
2. Senso di umiltà
3. Pazienza
4. Nervosismo
5. Non disperazione
6. Senso di fallimento
7. Serenità
8. Frustrazione
9. Malessere
10. Rabbia
11. Difficoltà
12. Non coinvolgimento

13. Delusione
14. Senso di incapacità
15. Felicità (di poterglielo rispiegare)
16. Tranquillità
17. Scoraggiamento
18. Rassegnazione.

I docenti non mostrano disinteresse nei confronti delle difficoltà e si dichiarano interessati a mettere in discussione il proprio operato; una sola docente nega la presenza di difficoltà: «*In genere non capita, ma se capita ti poni la questione di che pesci prendere*». La stragrande maggioranza mostra sensibilità, attenzione e volontà di mettersi in discussione e di esplorare nuove strade con gli allievi:

«*cerco di lavorare di più per migliorare*»;
«*cerco di farli lavorare praticamente perché non si sentano in ansia*»;
«*cerco di non perdermi d'animo e di cominciare tutto daccapo*»;
«*mi sento spronata a incoraggiarli e a cambiare strategie* »;
«*cerco di dare loro gli strumenti* »;
«*mi chiedo in che cosa non sia stata chiara*»;
«*cerco di dare loro gli strumenti* »;
«*mi dico che devo abbassare il tiro se sono in difficoltà* »;
«*cerco di capire qual è il nodo, la difficoltà*».

Capitolo ottavo

Conclusioni

8.1. La discussione dei risultati

L'obiettivo della ricerca è stato quello di studiare le convinzioni che i docenti di scuola primaria hanno: sui problemi, sugli obiettivi di insegnamento che ispirano la loro pratica didattica, con specifico riferimento alle Indicazioni Nazionali per il curricolo del 2012, sulla risoluzione dei problemi e le relative teorie del successo.

Per acquisire in modo dettagliato tali convinzioni, è stata costruita, testata e poi somministrata, un'intervista semi-strutturata a 45 docenti di diverse regioni italiane: del Sud e delle Isole, del Centro e del Nord.

Nella prima parte dell'intervista gli insegnanti hanno analizzato sette problemi, selezionati e modificati avendo come riferimento sei diverse tipologie di prove: problema standard, problema narrativo, compito di realtà, esercizio anticipato, quesito simil-Invalsi, problema non standard inclusivo.

Ciascuno dei sette problemi ha determinato, da parte degli insegnanti intervistati, risposte ben connotate, che sono state acquisite, analizzate e interpretate.

I docenti si sono espressi in modo diametralmente opposto nei confronti di uno stesso problema, e ciò è apparso in modo evidente nel corso dell'analisi e della valutazione del problema narrativo *Le monete*.

Grazie alle due diverse "classifiche", di gradimento e di applicabilità in aula, è stato possibile prendere atto di incongruenze tra ciò che gli insegnanti dichiarano di apprezzare e ciò che invece sentono di poter utilizzare in aula, lavorando con i propri allievi.

Si è visto, per esempio, che problemi ritenuti particolarmente validi per le loro potenzialità a far ragionare e discutere gli allievi (come *Le monete* (narrativo) e *Il giardino di Torquato* (non standard inclusivo), provocano in alcuni docenti delle resistenze, nel momento in cui si tratta di accoglierli e di pensarli in un'ottica di applicabilità in aula.

Al contrario, problemi che non sono particolarmente apprezzati sul piano delle potenzialità di ragionamento e di sviluppo di procedimenti risolutivi creativi e personali, in quanto considerati fondamentalmente esercizi, come *Il commerciante* (classico standard), sembrano invece essere graditi per il lavoro in aula, perché considerati più "adatti" agli allievi che possono applicare le tecniche e le conoscenze acquisite nel corso delle lezioni di matematica.

Taluni docenti sembrano essere rassicurati dal conseguimento del "risultato" da parte degli allievi e nello stesso tempo ammettono che ciò confligge con il primato che i processi dovrebbero avere nel lavoro sui problemi.

Anche i problemi esercizio, e ci si riferisce ancora al problema *Il commerciante (*classico standard*)*, possono mettere in difficoltà gli allievi per diversi motivi. Nel caso del problema citato, la compravendita è un argomento complesso, lontano dall'esperienza quotidiana degli allievi. I suoi termini specifici: "ricavo", "incasso", "guadagno" richiedono spesso una "discussione" in classe, che però, in questo caso, assume il significato di "confronto dialogico" tra insegnante e alunni, per cercare di capire meglio il significato di ciò che si sta apprendendo.

Uno dei problemi proposti, *Il giardino di Torquato (*non standard inclusivo*)*, ha riscosso un apprezzabile successo presso gli insegnanti intervistati perché, pur non essendo il solito problema standard "rassicurante", permette agli allievi di utilizzare diversi procedimenti risolutivi: il classico procedimento scolastico (misurazione e applicazione delle formule studiate), la visualizzazione geometrica con risoluzione senza passaggi scritti, il ritaglio e la sovrapposizione.

Il problema *Il giardino di Torquato*, dunque, oltre ad essere un buon "catalizzatore" di processi, "funziona" perché permette ai ragazzi di arrivare al risultato, ciascuno a suo modo.

Il problema *Una mostra in aula*, proposto ai docenti come compito di realtà, ha suscitato una serie di perplessità, fin dalla fase del try out. Molti docenti hanno cercato di modificarlo con l'intento, più o meno esplicito, di renderlo "autentico" oltre che "reale", e anche più fattibile in termini pratici.

Proporre i sette problemi si è rivelata una buona scelta, in quanto essi hanno sollecitato tutta una serie di riflessioni che hanno permesso ai docenti di effettuare un'attenta analisi metacognitiva, alla quale non sono molto avvezzi.

Alcuni docenti hanno modificato le loro convinzioni su alcuni problemi nel corso dell'intervista stessa; si può ipotizzare che ci sia stato un inizio di cambio di convinzioni, proprio grazie alla possibilità di avere un "tempo dedicato" per poter riflettere su una gamma più vasta di prove, per conoscerle meglio, valorizzandone le specifiche caratteristiche e potenzialità.

Ciò ha "smosso" nei docenti il proposito di poter modificare le proprie scelte didattiche e di portare la classe all'altezza di tali compiti, anziché il contrario.

I sette problemi, inoltre, sono stati utilizzati come mediatori per poter acquisire i significati attribuiti dai docenti intervistati ad alcune parole chiave, presenti nella premessa delle Indicazioni Nazionali: "significatività", "autenticità", "contesto autentico e significativo", "discussione", "argomentazione".

L'analisi dei dati ha mostrato che i docenti intervistati hanno attribuito significati diversi alle parole sopra indicate. Questo risultato può indurre a ipotizzare che ci possano essere interpretazioni diverse del testo delle Indicazioni Nazionali, con conseguente ricaduta sulle scelte didattiche dei docenti.

Pensare che la discussione possa essere un'occasione per far emergere idee vincenti di alcuni allievi, e che ciò possa permettere anche a chi non ce la farebbe mai di arrivare alla soluzione, è molto diverso dal pensare alla discussione come una "polifonia di voci", di contributi, di scambi, nel corso della quale, con una guida sapiente e non invadente dell'insegnante, nascono e si realizzano processi risolutivi ricchi e significativi che non necessariamente devono condurre al risultato (cfr. § 1.4.4, p. 41).

Ciò vale per la parola "discussione", ma anche per termini come "autentico", "significativo" e "legato alla vita quotidiana", che, sebbene siano proposti in un'unica proposizione nel testo della premessa delle Indicazioni Nazionali, hanno in realtà significati specifici e ben precisi, dei quali si dovrebbe tener conto nel momento in cui si scelgono o si redigono i testi dei problemi e quando ci si trova ad analizzare e a comprendere alcune difficoltà incontrate dagli allievi nel corso dei processi risolutivi.

Altri risultati di questa ricerca sono apparsi di particolare interesse: le convinzioni che i docenti hanno espresso su indicatori e cause del successo degli allievi nel problem solving matematico; l'acquisizione di un vasto repertorio di strategie che i docenti ipotizzano, sia per poter "aiutare" un bambino a diventare un "buon risolutore", che per affiancarlo efficacemente nella gestione delle difficoltà incontrate nel risolvere un problema.

Si riscontrano profonde differenze tra gli insegnanti per quanto riguarda l'importanza attribuita ai processi, in fase di risoluzione di un problema, o ai prodotti, rispetto quindi al raggiungimento della soluzione di un problema.

Ci sono insegnanti che, nel definire le caratteristiche del "buon risolutore", offrono delle indicazioni molto astratte, legate a fattori innati dei ragazzi e quindi poco utili ai fini della rilevazione di comportamenti osservabili degli allievi. Ciò porta con sé la difficoltà di poter "diagnosticare" comportamenti non adeguati, con la conseguente impossibilità di poter intervenire su di essi, strutturando, come sarebbe opportuno, interventi didattici mirati che possano andare a modificare lo stato delle cose.

Altri insegnanti, invece, indicano cause e comportamenti più circoscritte, con conseguente guadagno rispetto alla possibilità di progettare azioni mirate che possano sbloccare certe situazioni "patologiche" dal punto di vista della didattica del problem solving.

Di particolare interesse appare la distinzione tra "strategie a maglie strette con focus sui processi" e "strategie a maglie strette con focus sui prodotti", che potrebbe condurre all'individuazione di "profili di docenti" più propensi ad attuare una pratica didattica che metta al centro i pensieri e le rappresentazioni dei bambini e "profili di docenti" che mirano di più al risultato, valorizzando quindi la ripetitività e il conseguimento del mero prodotto, come indicatore del vero successo.

Un altro elemento, meritevole di essere sottolineato, è che, sia nella definizione dei tratti del buon risolutore, sia nel caratterizzare le strategie dei docenti, entrano in gioco competenze non solo matematiche: spirito di iniziativa e imprenditorialità, imparare ad imparare e gli aspetti affettivi e motivazionali. Ciò conferma che la risoluzione di "veri" problemi matematici ha potenzialità formative che vanno ben oltre l'ambito matematico e contribuisce allo sviluppo di personalità nella loro completezza.

8.2. Implicazioni didattiche

Molteplici possono essere le implicazioni didattiche dei risultati del lavoro di ricerca presentato.

1. Una classificazione dei problemi matematici, così come è stata proposta nel corso delle interviste effettuate, potrebbe costituire uno spunto da cui partire per attuare confronti "in orizzontale", tra i docenti delle diverse classi, ma anche una riflessione da effettuare "in verticale", nei contesti di costruzione di curricula che abbracciano tutto il ciclo scolastico, dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria.

In questo modo i docenti potrebbero approfondire le potenzialità formative dei diversi problemi, così come potrebbero individuarne i limiti. Ciò avrebbe il beneficio di sviluppare un atteggiamento critico e costruttivo rispetto alla grande quantità di problemi e di prove di diversa natura che i docenti ritrovano nei testi scolastici e parascolastici, per poter operare una scelta oculata, consapevole e mirata dei problemi da presentare agli alunni, ipotizzando, perché no, una revisione e una riscrittura degli stessi, anche eventualmente in collaborazione con gli alunni.

Una molteplicità di proposte da parte degli insegnanti potrebbe inoltre: valorizzare più stili cognitivi; sollecitare molteplici strategie rappresentative e comunicative; sviluppare e consolidare importanti competenze matematiche e non matematiche, in linea con i documenti nazionali e internazionali, presentati nel capitolo 4 della prima parte di questa ricerca. Si ritiene che i traguardi formativi, auspicati per il problem solving, sia nei documenti nazionali che nei documenti internazionali, siano raggiungibili puntando sulla molteplicità e sulla varietà delle proposte, e dunque presentando problemi di varia natura e di livello diverso, in modo tale da attivare le diverse intelligenze e gli svariati approcci personali degli alunni presenti nelle classi.

2. Si potrebbero poi configurare piste di autoformazione che abbiano anche il vantaggio di far acquisire agli insegnanti non solo la consapevolezza della propria visione della matematica e dei problemi matematici, ma anche, attraverso il confronto con i colleghi, delle possibili molteplicità di queste visioni (Zan, 2010, p. 272).

3. I risultati della ricerca hanno messo in evidenza che i docenti attribuiscono significati molto diversi a "parole" presenti nella premessa delle Indicazioni, ma anche nel linguaggio utilizzato comunemente tra docenti a scuola e nelle formazioni: chiaro, significativo, reale, autentico, discussione, argomentazione. L'esplicitazione di tali significati è alla base di ogni consapevole decisione professionale ed è necessario tenerne conto nei diversi contesti formativi. La difficoltà di introdurre curricula innovativi nelle scuole spesso è motivato da una mancanza di un' analisi preliminare che curi l'acquisizione delle convinzioni implicite ed esplicite dei docenti, che di fatto condizionano le loro decisioni didattiche, a volte inadeguate e contraddittorie. Una buona formazione dei docenti, che consideri e tenga conto di questi aspetti, potrebbe assumere il ruolo di mediazione tra documenti istituzionali, materiali scolastici e pratica didattica in aula. Tale formazione dovrebbe mettere al centro gli insegnanti: con le loro storie, le loro teorie, le loro scelte, affiancandoli grazie alla realizzazione di un contesto di virtuoso scambio comunicativo collettivo, che permetta l'ideazione di pratiche di insegnamento, mirate a favorire attività significative di problem solving matematico per gli al-

lievi e che diano valore ai processi, oltre che ai prodotti. Tale formazione dovrebbe riuscire a sviluppare nei docenti un senso di "autoefficacia professionale", tale da far loro presagire il superamento di possibili limiti, autoimposti da convinzioni preesistenti, ma potenzialmente modificabili.

4. Nel corso dell'analisi dei dati e della presentazione dei risultati sono stati proposti diversi schemi riassuntivi e riepilogativi, che hanno avuto l'intento di stabilire legami tra soggetti, fattori, processi. Tali categorizzazioni potrebbero essere utilizzate dai docenti come quadri di riferimento, per la sperimentazione in aula.

Per fare un esempio, partendo da riscontri effettuati su bambini che non risultino essere dei buoni risolutori, si potrebbero mettere a punto azioni didattiche, prendendo spunto dalle strategie presentate nei quadri di sintesi (per esempio: «dare meno regole possibili», «evitare di far cercare le parole chiave» oppure altre) e verificare se, quanto e in quali circostanze siano efficaci.

Nello stesso tempo, tali quadri categoriali potrebbero permettere di distinguere quelle convinzioni che vanno in una direzione di ineluttabilità del lavoro dell'insegnante, laddove si ritiene che le capacità del buon risolutore siano "tratti innati", da quelle convinzioni che mirano ad osservare e descrivere, per poter comprendere, interpretare, e poi recuperare, gli alunni che non mostrano di essere buoni risolutori, proprio in quelle aree nelle quali sono più carenti.

8.3. Problemi aperti e direzioni future

Si intravedono alcune possibili piste per la ricerca:

Le differenti interpretazioni di parole come "chiarezza", "discussione", "autenticità", "significatività", "buon risolutore" forniscono "categorie interpretative" che possono essere utili per futuri studi quantitativi e qualitativi, nel campo specifico che è oggetto del nostro studio.

Si potrebbe ragionare, nelle sedi istituzionali opportune, sull'opportunità di "rivedere" il testo delle Indicazioni Nazionali, approfondendo e chiarendo quei termini che sono di particolare pregnanza psico-pedagogica e che meritano maggiore attenzione e approfondimento da parte dei docenti.

Sarebbe opportuno mettere a punto modelli di formazione più efficaci per i docenti, al fine di garantire loro un miglior "successo": come insegnanti professionisti, autoriflessivi e in cammino.

Appendice

ALLEGATO A: Traccia intervista per docenti di quarta primaria

Versione definitiva

Data intervista:

Tipologia diretta telefonica

Durata intervista……….

Dati personali dell'insegnante intervistato/a

Nome……………………. Cognome……………………..

Scuola di appartenenza………………………………………………………

Tipologia contratto di lavoro…………………………………………………

Anni di insegnamento complessivi nella scuola primaria……………………

Anni di insegnamento della matematica nella scuola primaria……………..

Anni di insegnamento della matematica in classe quinta……………………

Domande guida

1. Parlami brevemente del tuo rapporto con la matematica e con i problemi matematici.

2. Ci sono state una o più esperienze formative che ti abbiano fatto riflettere sulla pratica dei problemi e che abbiano effettivamente modificato la tua pratica didattica?

Sì No
Se hai risposto sì, descrivila/e.

3. Quali caratteristiche, secondo te, deve avere un problema matematico?

4. Nella progettazione delle tua attività sui problemi, tieni conto del testo delle Indicazioni Nazionali per il curricolo?

Sì *No*

Se si, quale parte delle Indicazioni utilizzi per progettare attività sui problemi e perché?
Se no, spiega il perché.

5. Ti presento alcuni problemi. Analizzali in base alle domande che ti pongo.

a. Primo problema: Rocco e il suo giardino

Zio Rocco decide di sistemare il giardino nella sua casa al mare. Questo giardino è a forma di rettangolo: misura 6 m di larghezza e 4,5 m di lunghezza. Lo zio decide di disporre piantine sul suo contorno. Sistemando una piantina ogni 5 metri, quante piantine riesce a sistemare Rocco? Per ciascuna piantina spende € 3,80. Quanto spende in tutto?

1a. Proporresti il problema Rocco e il suo giardino il prossimo anno ai tuoi futuri alunni di quinta primaria?

SÌ NO

Motiva il perché della tua risposta.

2a. Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto che è importante che l'alunno discuta e argomenti le proprie scelte. Valuta in quale grado il problema Rocco e il suo giardino sollecita, secondo te, negli alunni la discussione e l'argomentazione, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado?

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta.

3a. Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto "(…) caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana". Valuta in quale grado il problema Rocco e il suo giardino propone, secondo te, un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado?

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta.

4a. Quale/i della seguente/i modalità organizzative utilizzeresti per far lavorare i tuoi futuri alunni di quinta alla risoluzione del problema Rocco e il suo giardino?

Lavoro individuale
Lavoro in coppia
Lavoro per gruppi omogenei
Lavoro per gruppi eterogenei
Discussione con tutta la classe
Altro (specificare)

Motiva il perché della tua risposta.

5a. Come utilizzeresti il problema Rocco e il suo giardino?

Come strumento per verificare l'acquisizione di conoscenze e abilità
Come occasione di applicazione e di consolidamento a casa
Come occasione di applicazione e di consolidamento in classe
Come strumento per costruire i concetti matematici stessi?
Come altro (specificare).

Spiega le motivazioni della tua risposta.

6a. Modificheresti qualcosa nel testo del problema?

SÌ NO

Se sì, cosa modificheresti? Perché?

b. Secondo problema: Le monete

Piero e Francesco partono per una gita a piedi. Piero mette nel suo zainetto 5 panini e Francesco mette 7 panini nel suo. Lungo la strada incontrano uno sconosciuto, affamato, ma senza provviste. Decidono di mettere in comune i loro panini e mangiano tutti e tre un uguale numero di panini. Al momento di lasciarsi, lo sconosciuto, come ringraziamento per il pane ricevuto, dà 5 monete a Piero e 7 a Francesco. Piero dice: "Ne devi dare solo 3 a me, e 9 a Francesco. Infatti anche noi abbiamo mangiato parte dei 12 panini. "Francesco dice: "Dal punto di vista della matematica Piero ha ragione. Ma l'importante è che ognuno di noi ha messo quello che aveva: quindi dai 6 monete a Piero e 6 a me".
Lo sconosciuto non sa più come fare. Non capisce perché dal punto di vista della matematica sarebbe più giusto dare 3 monete a Piero e 9 a Francesco. Prova a spiegarglielo. Tu al posto suo come faresti? 6 monete a Piero e 6 a Francesco? Oppure 3 a Piero e 9 a Francesco? Oppure 5 monete a Piero e 7 a Francesco?

1b. Proporresti il problema Le monete il prossimo anno ai tuoi futuri alunni di quinta primaria?

SÌ NO

Motiva il perché della tua risposta.

2b. Valuta in quale grado il problema Le monete può sollecitare, secondo te, negli alunni la discussione e l'argomentazione, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado?

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta.

3b. Valuta in quale grado il problema Le monete propone, secondo te, un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado?

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta.

4b. Quale/i della seguente/i modalità organizzative utilizzeresti per far lavorare i tuoi futuri alunni di quinta alla risoluzione del problema Le monete?

Lavoro individuale
Lavoro in coppia
Lavoro per gruppi omogenei
Lavoro per gruppi eterogenei
Discussione con tutta la classe
Altro (specificare)

Motiva il perché della sua risposta.

5b. Come utilizzeresti il problema Le monete?

Come strumento per verificare l'acquisizione di conoscenze e abilità
Come occasione di applicazione e di consolidamento a casa
Come occasione di applicazione e di consolidamento in classe
Come strumento per costruire i concetti matematici stessi
Come altro (specificare cosa).

Spiega le motivazioni della tua risposta..

6b. Modificheresti qualcosa nel testo del problema?

SÌ NO

Se hai risposto sì, cosa modificheresti? Perché?

c. Terzo problema: Una mostra in aula

Scegli una parete nella tua aula dove esporre i lavori più significativi della classe. Misura le dimensioni della parete. Hai a disposizione cartelloni di misura 70cmx100cm. Quanti cartelloni ti occorrono al massimo se vuoi tappezzare la parete.

c1. Proporresti il problema Una mostra in aula il prossimo anno ai tuoi futuri alunni di quinta primaria?

SÌ NO

Motiva il perché della tua risposta.

c2. Valuta in quale grado il problema Una mostra in aula può sollecitare negli alunni la discussione e l'argomentazione, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado?

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta.

c3. Valuta in quale grado il problema Una mostra in aula propone, secondo te, un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado?

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta.

c4. Quale/i della seguente/i modalità organizzative utilizzeresti per far lavorare i tuoi futuri alunni di quinta alla risoluzione del problema Una mostra in aula?

Lavoro individuale

Lavoro in coppia
Lavoro per gruppi omogenei
Lavoro per gruppi eterogenei
Discussione con tutta la classe
Altro (specificare)

Motiva il perché della sua risposta.

c5. Come utilizzeresti il problema Una mostra in aula?

Come strumento per verificare l'acquisizione di conoscenze e abilità
Come occasione di applicazione e di consolidamento a casa
Come occasione di applicazione e di consolidamento in classe
Come strumento per costruire i concetti matematici stessi
Come altro (specificare).

Spiega le motivazioni della tua risposta.

c6. Modificheresti qualcosa nel testo di questo problema?

SÌ NO

Se hai risposto sì, cosa modificheresti? Perché?

d. Quarto problema: Il commerciante

Il signor Giorgio fa il commerciante. Compra 436 penne a € 0,80 ciascuna Rivende la metà delle penne e incassa € 266,00. Quanto guadagna per ogni penna?

d1. Proporresti il problema Il commerciante il prossimo anno ai tuoi futuri alunni di quinta primaria?

SÌ NO

Motiva il perché della tua risposta.

d2. Valuta in quale grado il problema Il commerciante può sollecitare, secondo te, negli alunni la discussione e l'argomentazione, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado?

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta.

d3. Valuta in quale grado il problema Il commerciante propone, secondo te, un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado?

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta.

d4. Quale/i della seguente/i modalità organizzative utilizzeresti per far lavorare i tuoi futuri alunni di quinta alla risoluzione del problema Il commerciante?

Lavoro individuale
Lavoro in coppia
Lavoro per gruppi omogenei
Lavoro per gruppi eterogenei
Discussione con tutta la classe
Altro (specificare)

Motiva il perché della sua risposta.

d5. Come utilizzeresti il problema Il commerciante?

Come strumento per verificare l'acquisizione di conoscenze e abilità
Come occasione di applicazione e di consolidamento a casa
Come occasione di applicazione e di consolidamento in classe

Come strumento per costruire i concetti matematici stessi
Come altro (specificare)

Spiega le motivazioni della tua risposta.
d6. Modificheresti qualcosa nel testo di questo problema?

SÌ NO

Se sì, cosa modificheresti? Perché?

e. Quinto problema: Gli alunni di Anna

La maestra Anna, parlando dei suoi allievi, disse:"La metà dei miei alunni ama solo la matematica. La quarta parte ama solo le scienze; 1/7 ama solo l'arte e il disegno. Inoltre tre alunni amano tutte le materie". Quanti sono complessivamente gli allievi della maestra Anna?

e1. Proporresti il problema Gli alunni di Anna il prossimo anno ai tuoi futuri alunni di quinta primaria?

SÌ NO

Motiva il perché della tua risposta.

e2. Valuta in quale grado il problema Gli alunni di Anna può sollecitare, secondo te, negli alunni la discussione e l'argomentazione, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado?

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta.

e3.Valuta in quale grado il problema Gli alunni di Anna propone, secondo te, un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado?

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta.

e4. Quale/i della seguente/i modalità organizzative utilizzeresti per far lavorare i tuoi futuri alunni di quinta alla risoluzione del problema Gli alunni di Anna?

Lavoro individuale
Lavoro in coppia
Lavoro per gruppi omogenei
Lavoro per gruppi eterogenei
Discussione con tutta la classe
Altro (specificare)

Motiva il perché della sua risposta.

e5. Come utilizzeresti il problema Gli alunni di Anna?

Come strumento per verificare l'acquisizione di conoscenze e abilità
Come occasione di applicazione e di consolidamento a casa
Come occasione di applicazione e di consolidamento in classeCome strumento per costruire i concetti matematici
Come altro (specificare)

Spiega le motivazioni della tua risposta.

e6. Modificheresti qualcosa nel testo del problema?

SÌ NO

Se hai risposto sì, cosa modificheresti? Perché?

f. Sesto problema: Il rettangolo

Marco dice:"Se raddoppia la misura del perimetro di un rettangolo, anche la sua area raddoppia".

Sei d'accordo con lui? SÌ NO

Giustifica la tua risposta.

f1. Proporresti il problema *Il rettangolo* il prossimo anno ai tuoi alunni di quinta primaria?

SÌ NO

Motiva il perché della tua risposta

f2. Valuta in quale grado il problema *Il rettangolo* può sollecitare, secondo te, negli alunni la discussione e l'argomentazione, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado?

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta.

f3. Valuta in quale grado il problema *Il rettangolo* propone, secondo te, un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado?

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta.

f4. Quale/i della seguente/i modalità organizzative utilizzeresti per far lavorare i tuoi futuri alunni di quinta alla risoluzione del problema Il rettangolo?

Lavoro individuale
Lavoro in coppia
Lavoro per gruppi omogenei

Lavoro per gruppi eterogenei
Discussione con tutta la classe
Altro (specificare)

Motiva il perché della sua risposta.

f5. Come utilizzeresti il problema *Il rettangolo*?

Come strumento per verificare l'acquisizione di conoscenze e abilità
Come occasione di applicazione e di consolidamento a casa
Come occasione di applicazione e di consolidamento in classeCome strumento per costruire i concetti matematici stessi
Come altro (specificare)

Spiega le motivazioni della tua risposta

f6. Modificheresti qualcosa nel testo del problema?

SÌ NO

Se hai risposto sì, cosa modificheresti? Perché?.......

g. Settimo problema: Il giardino di Torquato

Questo è il giardino del signor Torquato.

Nella parte grigia egli ha piantato fiori e ha seminato a prato la parte bianca.
Il signor Torquato osserva il suo giardino e si chiede: Sarà maggiore l'area della parte con i fiori o quella della parte con il prato?"
Quale sarà la risposta? Spiega il tuo ragionamento.

g1. Proporresti il problema Il giardino di Torquato il prossimo anno ai tuoi allievi di quinta primaria
SÌ NO

Motiva il perché della tua risposta

g2. Valuta in quale grado il problema Il giardino di Torquato, secondo te, può sollecitare negli alunni la discussione e l'argomentazione, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado?

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta

g3. Valuta in quale grado il problema Il giardino di Torquato propone, secondo te, un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado?

4 3 2 1

Motiva il perché della tua risposta

g4. Quale/i della seguente/i modalità organizzative utilizzeresti per far lavorare i tuoi futuri alunni di quinta alla risoluzione del problema Il giardino di Torquato?

Lavoro individuale
Lavoro in coppia
Lavoro per gruppi omogenei
Lavoro per gruppi eterogene
Discussione con tutta la classe
Altro (specificare)

Motiva il perché della tua risposta

g5. Come utilizzeresti il problema Il giardino di Torquato?

Come strumento per verificare l'acquisizione di conoscenze e abilità
Come occasione di applicazione e di consolidamento a casa
Come occasione di applicazione e di consolidamento in classe
Come strumento per costruire i concetti matematici stessi
Come altro (specificare)

Spiega le motivazioni della tua risposta..

g6. Modificheresti qualcosa nel testo del problema?

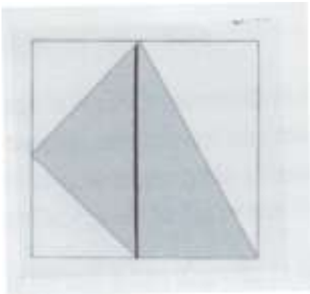
SÌ NO

Se si, cosa modificheresti?...

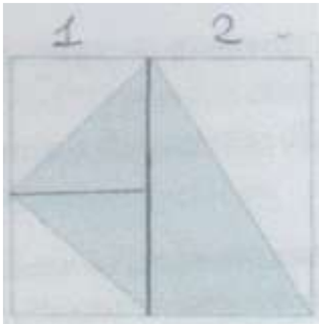
g7. Anna, Lucia e Sandra hanno risolto correttamente il problema di Tor quato ma hanno utilizzato procedimenti diversi. Li hanno spiegati nel modo seguente:

1. Anna: «*Ho scomposto la figura grigia in due triangoli, nel modo che segue:*

Ho preso le misure delle basi e delle altezze dei due triangoli grigi, ho calcolato le due aree e le ho sommate; così ho ottenuto l'area della parte grigia. Ho poi preso le misure del lato del quadrato e ho calcolato la sua area. Ho sottratto dall'area del quadrato l'area della parte grigia e ho ottenuto l'area della parte bianca. Infine ho confrontato le misure dell'area grigia e dell'area bianca e ho visto che erano uguali».



2. Lucia: «*Ho scomposto la figura nel modo che segue:*



Ho analizzato la figura scomposta in due parti (1 e 2). Nella parte 1 i due triangoli grigi hanno la stessa superficie dei due triangoli bianchi (ho anche misurato con il righello). Nella parte 2, il triangolo grigio ha la stessa superficie del triangolo bianco. Quindi la parte con i fiori è uguale per superficie alla parte con il prato».

3. Sandra: « *Ho preso le forbici e ho ritagliato la figura, separando la parte grigia dalla parte bianca. Ho messo le parti di carta grigia sulle parti di carta bianca e ho visto che erano perfettamente sovrapponibili. Quindi l'area con i fiori misura tanto quanto l'area seminata a prato*».

g8. Valuta, da 4 a 1, ciascuno dei tre procedimenti, dove con 4 indichi il massimo dell'apprezzamento e con 1 il minimo dell'apprezzamento?

Anna
Lucia
Sandra
Spiega le motivazioni delle tue valutazioni.

6. Hai letto e analizzato i 7 problemi. Ora componi una graduatoria, mettendo al primo posto il problema che ti piace di più e all'ultimo quello che ti piace di meno. Motiva le tue scelte.

1°………………………………………. Perché
2°…………………………………………Perchè
3°………………………………………. Perché
4°………………………………………. Perché
5°………………………………………. Perché
6°………………………………………. Perché
7°………………………………………. Perché

7. Componi, ora, una seconda graduatoria, mettendo al primo posto il problema che ritieni più adatto da proporre in classe ai tuoi alunni e all'ultimo quello che ritieni meno adatto. Motiva le tue scelte.

1°…………………………………… Perché
2°……………………………… Perché
3°…………………………………………Perché
4°…………………………………………Perché
5°…………………………………………Perché
6°…………………………………………Perché
7°…………………………………………Perché

8. Esistono, secondo te, alunni che sono buoni risolutori?

Sì No

Se hai risposto sì, quali elementi caratterizzano, secondo te, un alunno che è un "buon risolutore.

9. Può un insegnante aiutare un suo alunno a diventare un "buon risolutore"?

Sì No

Se hai risposto sì, esponi cosa un insegnante, secondo te, potrebbe fare?

10. Quali sono le difficoltà più frequenti che i tuoi alunni incontrano nei problemi?

11. ***Cosa fai quando riscontri che qualche tuo alunno sta incontrando le difficoltà indicate nella risposta precedente*****?**

12. Come ti senti quando i tuoi alunni incontrano difficoltà nel risolvere un problema?

13. Sei soddisfatto/a dei problemi presenti sui libri di testo?

SÌ NO

Spiega le motivazioni della tua risposta.

14. Quali suggerimenti daresti ai responsabili di una casa editrice che intendono migliorare i i problemi presenti sui libri scolastici?

15. Quali argomenti ti piacerebbe approfondire in un corso per migliorare la tua pratica didattica dei problemi matematici?

16. Quali vissuti ed emozioni ti ha suscitato questa intervista. Quali pensieri? Descrivi.

Grazie per la collaborazione

ALLEGATO B: Intervista completa trascritta

Tipologia intervista	telefonica
Durata dell'intervista	90 minuti
Nome docente	Alba (nome di fantasia)
Scuola di appartenenza	Circolo didattico di Pantelleria
Contratto di lavoro	indeterminato
Anni di insegnamento scuola primaria	33
Anni di insegnamento della matematica nella scuola primaria	33
Anni di insegnamento della matematica in classe quinta	10

1. *R: Qual è il tuo rapporto con la matematica e con i problemi matematici?*
2. I: Buono. Anche da studentessa; mi risultava abbastanza facile; affrontavo i problemi senza difficoltà. Certo erano esercizi, non richiedevano illuminazioni improvvise; erano problemi ordinari
3. R: Mi dai qualche info sulla tua formazione matematica.
4. I: Formazione interessante nell'anno di prova. Si riteneva che gli insegnanti non dovevano insegnare cose che non erano ben capite. A questa si è aggiunta una specializzazione a minorati della vista: i bambini ricevono chiacchiere, ma non restituiscono concetti. Partecipazione a Convegni a Castel San Pietro Terme. Faccio l'insegnante in verticale, faccio una quinta ogni due o tre anni. Ho scelto di lavorare in campagna con delle classi poco numerose. Mi posso permettere di tirare fuori tutta una serie di attrezzature. L'idea di farlo con 25 bambini mi scoraggerebbe. Tutti questi elementi hanno condizionato il mio modo di lavorare
5. R: *Quali caratteristiche, secondo te, deve avere un problema?*
6. I: Deve un po' richiedere l'abilità di tradurre la realtà in termini matematici e deve stimolare la capacità di produrre buone rappresentazioni della realtà, della situazione di cui si parla. A monte, un problema matematico deve cercare di ridurre al minimo tutto quello che è legato alla comprensione del testo. Io penso ai miei bambini e anche a quante volte anche nelle prove Invalsi: tutto passa attraverso il linguaggio. Un bambino che non ha una padronanza linguistica, che non ha un lessico adeguato, che non riesce a leg-

gere e a rappresentarsi mentalmente la cosa, già è tagliato fuori al di là di quelle che sono le abilità matematiche. Questa componente linguistica non si può azzerare, però diciamo che tendenzialmente dovrebbe avvicinarsi…Poi stimolare la mobilitazione di conoscenze e abilità afferenti a un campo particolare. Capire se questa situazione mi fa venire in mente certe cose. Non chiedere soluzioni troppo lontane dalla portata. Secondo me, è scorrettissimo nelle prove Invalsi interferire con le consegne così arzigogolate: piastrellista, sovrapporre, ecc… A parte poi tutta una serie di altri aspetti. Chi fa le prove credo che non conosce i bambini. Chi pensa che un bambino di seconda possa fare 1,08 cm; un bambino di seconda non lo conosce.

7. R: *Nella progettazione delle tue attività sui problemi, tieni conto del testo delle Indicazioni Nazionali per il curricolo? Se sì, quale parte delle Indicazioni utilizzi per progettare attività sui problemi e perché? E quale parte ti capita di utilizzare? La premessa? Gli obiettivi?*
8. I: Si, certo. Diciamo che non dicono tantissimo sui problemi. Troviamo qualcosa dove dice: controllare i risultati e il procedimento risolutivo.
9. *R: Ti presento alcuni problemi. Analizzali in base alle domande che ti pongo*

   A) *Rocco e il suo giardino*

   Proporresti problemi di questo tipo ai tuoi futuri alunni di quinta primaria? Motiva il perché della tua risposta.
10. I: Si. Perché il risultato del perimetro del giardino non è un multiplo di 5, il problema non fa riferimento a un'apertura. Calare questo problema, che può anche essere studiato in un contesto reale significa invitare i bambini a fare tutta una serie di considerazioni. Un risultato di un'operazione, quando le piantine devono essere 5,3… Cosa vuol dire 5,3? Come risultati di un calcolo, devono poi essere sempre calati nella realtà. I pullman che accompagnano i bambini alla gita non possono essere 1,7; o sono 1 o sono 2. Tutto quel che costituisce un'occasione per passare da risultati a situazioni reali mi sembra un'occasione per fare considerazioni importanti.
11. *R: 5 A2) Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto che è importante che l'alunno discuta e argomenti le proprie scelte. Valuta in quale grado il problema Rocco e il suo giardino sollecita, secondo te, la discussione e l'argomentazione, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado? Motiva il perché della tua risposta.*

12. I: Si, si, abbastanza, io direi 3. Proprio perché dà un risultato che non ha senso; poi attribuirgli un senso vuol dire andare a fare i conti con la realtà.

13. *R: 5 A3) Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto (…) caratteristica della pratica matematica è la risoluzione dei problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana". Valuta in quale grado il problema Rocco e il suo giardino, propone, secondo te, un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado. Motiva il perché della tua risposta?*

14. I: Secondo me sono delle cose abbastanza significative. La difficoltà è quello di trovare il punto di equilibrio tra esercizio, attività matematica richiesta e situazione significativa. Se io, per richiedere un'attività matematica, mi devo andare a inventare un testo che mette in difficoltà, il gioco non vale la pena. Quindi, se io riesco a trovare un contesto significativo, immediato, facile che non passa per duemila chiacchiere, allora vale la pensa. Se no, sfoltiamo tutto e lasciamo il nocciolo della questione.

15. *R: 5 A4) Quale/i della/e seguente/*i modalità organizzative *utilizzeresti per far lavorare i tuoi futuri alunni di quinta alla risoluzione del problema Rocco e il suo giardino? Motiva il perché della tua risposta (lavoro individuale/in coppia/per gruppi omogenei/per gruppi eterogenei/Discussione con tutta la classe/Altro).*

16. I: Orientativamente preferisco il lavoro a coppie oppure il lavoro eterogeneo. Però abbiamo fatto delle scoperte per cui conviene anche cambiare, perché dipende anche dai bambini, oltre che alle capacità che hanno. Ma parlo di gruppi piccoli: due o tre bambini, massimo quattro. Poi ci potrebbe essere una condivisione e una discussione insieme. Abbiamo infatti verificato che anche bambini che fanno fatica a ragionare, quando si mettono con gli altri, sono stimolati.

17. R: Quale ruolo attribuiresti al problema?

18. I: È un modo anche per costruire concetti matematici: tra risultati e la realtà c'è sempre un lavoro di piegatura da fare. E questo secondo me è un concetto importante. È una competenza della persona, quella di trovarsi tra le mani un numero e attribuirgli un significato e in termini reali. Non lo darei a casa.

19. R: *Modificheresti qualcosa nel testo di questo problema?*

20. I: Dovrei somministrarlo, per capire se c'è qualcosa da cambiare.

21. R: Le monete (legge) 5 B1) Proporresti problemi di questo tipo ai tuoi futuri alunni di quinta primaria? Motiva il perché della tua risposta.

22. I: Si, mi piace, mi piace; perché da un lato devono riuscire a fare dei calcoli. Devono dire "Se quello prende 12 monete, quanti panini ha mangiato? Questi panini li paga con 12 monete, poi a chi appartengono questi panini?" Ciascuno dovrebbe avere in rapporto ai panini che ha messo a disposizione dell'altro. Però poi, al di là di questo, c'è anche una questione di valori, di scelte che uno fa. Valutiamo, prendiamo le stesse monete perché abbiamo avuto la stessa generosità nel mettere a disposizione tutto quello che avevamo? Oppure facciamo una valutazione sulla misura di quello che ciascuno… Mi sembra che si apra a tutta una serie di questioni che possono essere affrontate in classe con grande beneficio per tutti. Però, voglio dire, non devono diventare una prova Invalsi, devono diventare una chiacchierata in classe, no? Eh…

23. R: *Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto che è importante che l'alunno discuta e argomenti le proprie scelte. Valuta in quale grado il problema Le monete sollecita, secondo te, la discussione e l'argomentazione, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado? Motiva il perché della tua risposta.*

24. I: Ancora di più rispetto al primo, perché non c'è solo una questione tecnica; ci sono anche scelte da fare, che non hanno a che fare con i numeri.

25. *R: Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto (…) caratteristica della pratica matematica è la risoluzione dei problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana". Valuta in quale grado il problema Le monete, propone, secondo te, un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado. Motiva il perché della tua risposta*

26. I: Più che autentico, a me sembra significativo. Significativo perché può avere un senso per loro, perché sia da un punto di vista aritmetico, che da un punto di vista di fare delle valutazioni, di dare più importanza a una cosa piuttosto che un'altra. Le scelte che uno fa, con quali intenzioni. Vedere come pesano le cose. In prospettiva possiamo pensare che sono considera-

zioni che servono a campare. E che può capitare che uno si trovi a fare considerazioni di questo tipo. A me sembra sempre che il testo sia un po' lungo. Mi immagino tanti bambini che si perdono per strada. E quindi, quando a noi sembra che non abbiano elementi per fare delle considerazioni, invece semplicemente si sono persi per strada, la situazione non se la sanno immaginare bene, non hanno elementi per fare valutazioni, proprio perché si sono persi nel testo. Di questo ne sono abbastanza certa: quando il testo diventa lungo e articolato, tanti ce li perdiamo per strada. Non tutti, ma che importanza ha se galleggiano solo le eccellenze?

27. R. 5 B 4) *Quale/i della/e seguente/i modalità organizzative utilizzeresti per far lavorare i tuoi futuri alunni di quinta alla risoluzione del problema Le monete? Motiva il perché della tua risposta (lavoro individuale/in coppia/per gruppi omogenei/per gruppi eterogenei/Discussione con tutta la classe/Altro:*
28. I: Non ci sono problemi per cui io utilizzerei una modalità diversa. Ci mettiamo in gruppo, si ragiona sulle cose; poi proviamo a esporre quelle che sono le nostre soluzioni. Il gruppo più grande è chiamato in causa quando ogni piccolo gruppo espone le proprie cose. Tra i diversi problemi non faccio una distinzione di questo tipo.
29. R.: Quale ruolo attribuiresti al problema ruolo Rocco e il suo giardino?
30. I: Queste cose a casa, no. A casa solo esercizi di routine che servono a consolidare. In classe si lavora per costruire concetti e, si spera, qualche competenza
31. *R: 5 B6) Modificheresti qualcosa nel testo del problema? Se sì, che cosa?*
32. I: Dovrei sperimentarlo prima praticamente. Una cosa che farei in questo testo è quello di ridurre il testo [*presento il testo più sintetico*]. Io preferisco dove il bambino, che non ha un'adeguata comprensione del testo, ha lo stessa possibilità di affrontarlo matematicamente. Bisognerebbe vederlo. Ricordo una prova Invalsi, sempre di seconda, dove sopra c'era un bambino al luna park, e i miei già non sanno cosa è il luna park, perché non è un gioco che loro fanno. Però c'era una piramide con tutti i risultati, con una serie di barattoli numerati e poi il punteggio veniva calcolato sommando i barattoli caduti. Sotto c'erano i barattoli rimasti e poi c'era tutta 'sta spiegazione, per cui il bambino che si vede i barattoli rimasti deve aver capito che non deve contare quelli, ma deve contare quelli che non vede. Quindi deve fare

un confronto tra quello di sotto e quello di sopra, aver capito bene che deve far riferimento a quelli che sotto mancano. Per un bambino di due anni, sì di due anni, di seconda elementare, messo in una situazione difficile, chiedergli di leggere tutta 'sta cosa, di guardare le immagini, di riuscire a capire che la richiesta ti chiede quella che non vedi e non ti chiede quello che stai vedendo; tra contare quello che manca, e non vedo, e contare quello che vedo, c'è una difficoltà di abilità matematica? No. La difficoltà sta in tutta una serie di altre abilità che non sono imputabili alla competenza matematica. Se uno, questo problema, trova il modo di renderlo incomprensibile anche con i disegni…togliamoci mano.

33. *R: Questo è il terzo problema: Una mostra in aula*

5 C1) Proporresti problemi di questo tipo ai tuoi futuri alunni di quinta primaria? Motiva il perché della tua risposta.

34. I: Anche qui…cosa significa: nessuno spazio libero? È irreale. Quindi io mi prendo una striscia che è un ottavo di foglio? Quando io poi devo calcolare l'area della parete, calcolare l'area del cartellone, fare una divisione. E cioè io chiedo al bambino…Io lo sto ingannando? Perché lui sa che fa la divisione e poi quando mi dice 12,7 gli dico che non sta capendo niente? Io non lo devo ingannare il bambino. Oppure concretamente, in una parete… che vuol dire che prende la scala e arriva fino a tre metri? Allora, quando più tardi arrivo al problema dato in classe, io accenno a una cosa che somiglia a questa, che abbiamo fatto realmente ma che mi sembra più sensata. In questo mancano tanti dettagli. I cartelloni devono cominciare a scendere dal soffitto; c'è una zona in cui vanno messi? E se non deve rimanere spazio libero, metto pezzi di cartelloni? E però non sono disegni, cosa sono? Oppure arrotonda il numero per difetto? Però lo dobbiamo dire al bambino. Se è un gioco da fare in classe…vediamo che idee che abbiamo…Non è mai una cosa per prendere un bambino e valutarlo. Che pretesa ho rispetto a loro? Io vorrei, per come lavoro io, che il bambino dicesse: "Ma che senso ha mettere su una parete un pezzetto di cartellone, tagliare un disegno? Che senso ha far arrivare i cartelloni sotto i piedi. Ma chi li vede?

35. R: Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto che è importante che l'alunno discuta e argomenti le proprie scelte. Valuta in quale grado il problema Una mostra in aula sollecita, secondo te, la discussione e l'argomentazione, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado? Motiva

36. I: Sì, se noi stabiliamo che un bambino può dire: "Però, se è messo là, come la vediamo? Però stabiliamo anziché tutta la parete… una fascia, può essere, che

va da tanto a tanto. E poi ha senso metterli tutti appiccicati …Metterei 3, c'è da fare una bella chiacchierata.

37. R: 5 C3) *Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto (…) caratteristica della pratica matematica è la risoluzione dei problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana". Valuta in quale grado il problema Una mostra in aula, propone, secondo te, un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado. Motiva il perché della tua risposta*

38. I:. Questo mi sembra si, che in classe è possibile. Un 3.

39. R.: 5 C4) *Quale/i della/e seguente/i modalità organizzative utilizzeresti per far lavorare i tuoi futuri alunni di quinta alla risoluzione del problema Una mostra in aula? Motiva il perché della tua risposta (lavoro individuale/in coppia/per domanda non svolta)*

40. I: Piccolo gruppo. Io lavoro bene con il piccolo gruppo.

41. R: *Quale ruolo attribuiresti problema Una mostra in aula?*

42. I: Applicare e consolidare in classe. Questo fatto che l'unità di misura a un certo punto io mi devo affidare alle forme. Allora ha senso dire base per altezza. Diversamente sarebbe molto complicato metterci sulla scala e provare a contare la parete con questo cartellone, perché quando mi sposto sbaglio.

43. R: *Modificheresti qualcosa?*

44. I.: Io inizierei a porre semplicemente il problema. "Dobbiamo fare questa cosa. Sentiamo che consigli mi date per sistemare queste cosa. Poi sentiamo un po' cosa vieni fuori e poi a imbuto ci andiamo a infilare in conversazioni più centrate sulle questioni matematiche. In prima istanza, noi abbiamo questo mucchio di disegni. Se volessimo sistemarli, in che modo potremmo fare. Ogni gruppetto espone la sua proposta. L'importante è lavorare in un contesto protetto, in un contesto guidato sereno, dove nessuno si sente giudicato e sereno e le risposte non hanno un significato di giudizio.

45. R: Il commerciante *5 D1) Proporresti problemi di questo tipo ai tuoi futuri alunni i quinta primaria? Motiva il perché della tua risposta.*

46. I.: Anche qui, quanto guadagna per ogni penna? Se noi ragioniamo in termini reali, il guadagno non può essere fatto su ogni penna. Se, quando ne vendo metà, bisogna vedere se quella metà mi copre tutta la spesa; quindi alla fine io cosa è che guadagno? Posso aver perso. Io penso che noi non possiamo accompagnare i bambini a valutare in questo modo perché se no, cosa viene fuori? Che i problemi ci portano a delle risposte che poi realisticamente un bambino non impara a farsi i conti bene. Ci sono delle spese fatte. Io vorrei accompagnarli a fare delle considerazioni che tiene conto di tante cose. Lo potrei proporre il problema, ma tanto nel sussidiario ce ne sono a quintali. Se dobbiamo pensare a

dei problemi che siano migliori. Se stiamo facendo spesa, ricavo, guadagno, come esercizio, diamo qualcosa di questo tipo, anche a casa. Il problema che facciamo in classe deve essere altro

47. I: 5 D2) Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto che è importante che l'alunno discuta e argomenti le proprie scelte. Valuta in quale grado il problema Il commerciante sollecita, secondo te, la discussione e l'argomentazione, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado? Motiva il perché della tua risposta.

48. I: Poco. È un esercizio.

49. R. *5 D3) Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto (…) caratteristica della pratica matematica è la risoluzione dei problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana". Valuta in quale grado il problema Il commerciante, propone, secondo te, un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado. Motiva il perché della tua risposta.*

50. *I*: Io penso che sia un esercizio che si può fare. Nel momento in cui non ha la dignità di una questione che merita…si parla di un commerciante, può essere reale a un livello medio.

51. R.: *5 D4) Quale/i della/e seguente/i modalità organizzative utilizzeresti per far lavorare i tuoi futuri alunni di quinta alla risoluzione del problema? Motiva il perché della tua risposta (lavoro individuale/in coppia/per gruppi omogenei/per gruppi eterogenei/Discussione con tutta la classe/Altro)*

52. I: Individualmente; se sanno fare le operazioni.

53. R: *Quale ruolo attribuiresti alla risoluzione del problema Il commerciante? Spiega le motivazioni della tua risposta (vedi opzioni…)*

54. I: Conoscenze ed abilità. Applicazioni e consolidamento a casa e a scuola

55. R.: *5 D6) Modificheresti qualcosa nel testo del problema? Se sì, che cosa?*

56. I: Visto che è nell'ottica dell'esercizio, va bene così

57. *R: 5 E1) Proporresti problemi di questo tipo ai tuoi futuri alunni i quinta primaria? Motiva il perché della tua risposta? (Gli alunni di Anna)*

58. *I:* In una quinta come dovrebbero procedere? Visto che manca un numero? In quinta non lo fanno. Se noi mettiamo un gruppo di bambini e gli diamo una sfida, e va bene. Se diamo un tempo stabilito, non va bene. Secondo me è troppo difficile, a meno che non consideriamo delle eccellenze. Non lo proporrei. Se poi c'è un bambino che finisce prima il suo lavoro. Ma io non penso che gli avrei dato strumenti. È legittimo dare qualcosa su qualcosa che io gli ho dato.

59. *R: 5 E2) Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto che è importante che l'alunno discuta e argomenti le proprie scelte. Valuta in quale grado il problema Gli alunni di Anna sollecita, secondo te, la discussione e*

l'argomentazione, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado? Motiva il perché della tua risposta.
60. I: Non lo darei
61. R. 5 E3*) Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto (…) caratteristica della pratica matematica è la risoluzione dei problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana". Valuta in quale grado il problema Gli alunni di Anna, propone, secondo te, un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado. Motiva il perché della tua risposta*
62. I: Anche qui 4. Metà di questi va in mensa, 1/3 va a casa…
63. R.: Quale/i della/e seguente/i modalità organizzative utilizzeresti per far lavorare i tuoi futuri alunni di quinta alla risoluzione del problema Gli alunni di Anna? Motiva il perché della tua risposta (lavoro individuale/in coppia/per gruppi omogenei/per gruppi eterogenei/Discussione con tutta la classe/Altro)
64. I: Non lo darei
65. R: 5 E5) Quale ruolo attribuiresti alla risoluzione del problema Gli alunni di Anna? Spiega le motivazioni della tua risposta (vedi opzioni…)
66. I: Non lo darei.
67. R: 5 E6) Modificheresti qualcosa nel testo del problema? Se sì, che cosa?
Non lo darei.
68. R: *Il rettangolo (legge) 5 F1) Proporresti problemi di questo tipo ai tuoi futuri alunni di quinta primaria? Motiva il perché della tua risposta. Lo proporresti questo?*
69. I: Si, questo lo darei. Perché loro provano a vedere se questa cosa è vera; uno fa una forma, un altro ne fa un'altra. E si rendono conto di questa cosa. Che non è automatico, che raddoppia il perimetro e raddoppia l'area. Uno glielo deve far toccare con mano e gli fa fare dei tentativi.
70. R: 5 F2*) Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto che è importante che l'alunno discuta e argomenti le proprie scelte. Valuta in quale grado il problema Il rettangolo sollecita, secondo te, la discussione e l'argomentazione, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado? Motiva il perché della tua risposta.*
71. I: 2. Perché mi sembra una cosa della quale possono rendersi conto abbastanza facilmente. Non ha una portata di problematicità alta.
72. R.: 5 F3*) Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto (…) caratteristica della pratica matematica è la risoluzione dei problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana". Valuta in quale grado il problema Il rettangolo, propone, secondo te, un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado?*

73. I:. Non molto. Sono dei concetti che devono avere, che è bene che abbiano. Non mi so immaginare una situazione concreta in cui questa cosa possa essere utilizzata.
74. R: 5 F4) Quale/i della/e seguente/i modalità organizzative utilizzeresti per far lavorare i tuoi futuri alunni di quinta alla risoluzione del problema? Motiva il perché della tua risposta (lavoro individuale/in coppia/per gruppi omogenei/per gruppi eterogenei/Discussione con tutta la classe/Altro).
75. I: Gruppo e coppia
76. 5 F5*) Quale ruolo attribuiresti alla risoluzione del problema Il rettangolo? Spiega le motivazioni della tua risposta (vedi opzioni…)*
77. I: Strumento per costruire concetti matematici
78. R: 5 F6) *Modificheresti qualcosa nel testo del problema? Se sì, che cosa?*
79. I: Dovrei somministrarlo.
80. R: *Il giardino di Torquato (legge)*
5 D1) Proporresti problemi di questo tipo ai tuoi futuri alunni di quinta primaria? Motiva il perché della tua risposta?
81. I: Anche questo, rispetto agli obiettivi delle Indicazioni, mi sembra un buon invito. Imparare a scomporre, a vedere, a ruotare le figure, a immaginarsele.
82. R*: 5 D2) Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto che è importante che l'alunno discuta e argomenti le proprie scelte. Valuta in quale grado il problema Il giardino di Torquato sollecita, secondo te, la discussione e l'argomentazione, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado? Motiva il perché della tua risposta.*
83. I: Un po', perché loro non lo fanno immediatamente, di riuscire visivamente a pensare come due parti equiestese. Quindi si mettono a ragionare e poi alla fine si arriva…
84. R: 5 D3) *Nella parte introduttiva della Matematica delle Indicazioni Nazionali è scritto: "(…) Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione dei problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana". Valuta in quale grado il problema Il giardino di Torquato, propone, secondo te, un contesto autentico e significativo, legato alla vita quotidiana, su una scala di punteggi da 4 a 1, dove 4 rappresenta il massimo grado e 1 il minimo grado. Motiva il perché della tua risposta.*
85: I: Forse poco. Mi sembra una cosa scolastica.
86: R: 5 D4) *Quale/i della/e seguente/i modalità organizzative utilizzeresti per far lavorare i tuoi futuri alunni di quinta alla risoluzione del problema? Motiva il perché della tua risposta (lavoro individuale/in coppia/per gruppi omogenei/per gruppi eterogenei/Discussione con tutta la classe/Altro).*
87. I: A gruppetti.

88. R: 5 D5*) Quale ruolo attribuiresti alla risoluzione del problema Il rettangolo? Spiega le motivazioni della tua risposta (vedi opzioni…)*
89. I: costruire concetti matematici; per riuscire a vedere, immaginarsi movimenti e spostamenti che portano a valutare equiestensione.
90. *R: 5 D6) Modificheresti qualcosa nel testo del problema? Se sì, che cosa?*
91. I:. Prima lo proporrei.
92. R: *Anna, Lucia e Sandra hanno risolto il problema di Torquato e hanno dato la risposta corretta. Hanno spiegato in modo diverso il loro procedimento. Leggi di seguito i procedimenti utilizzati. (Anna, Lucia, Sandra). Valuta, da 4 a 1, ciascuno dei procedimenti, dove con 4 indichi il massimo dell'apprezzamento e con 1 il minimo dell'apprezzamento.*
93. I: Forse valuterei: Lucia poteva fare a meno di misurare con il righello, perché era evidente. A me sembra qualitativamente la migliore, piuttosto che andare a fare tutti queste misurazioni e calcoli. Quella di Lucia ha più senso matematico. Per quanto riguarda Sandra, uno auspica che il percorso possa essere fatto visivamente, senza bisogno di ricorrere alle forbici.
94. R: *Ti ricordi qualche problema che hai proposto in aula e consiglieresti a qualche collega?*
95. I: Noi siamo entrati in una scuola nuova. Non potevamo appendere al muro nulla. Avevamo bisogno di mettere i cartelloni e ci servivano delle bacchette. Ci sono venuti a chiedere delle bacchette, a un metro e mezzo o da due metri, e io ho passato la richiesta ai bambini. "Quante bacchette da un metro e mezzo e da due metri vi servono per appendere dei cartelloni, sfruttando al massimo le pareti dell'aula, tenendo conto degli arredi e poi anche dell'accessibilità alla vista degli alunni? Spiegate anche come siete arrivati alla risoluzione". Gli ho chiesto poi di fornire una lista delle bacchette da ordinare, però anche una minuta dei calcoli effettuati per compilare questa lista e di spiegare ai compagni quali considerazioni hanno guidato il lavoro nel gruppo e valutare anche le considerazioni degli altri gruppi. Ad un mio collega direi che è una situazione reale che lascia una certa libertà ai bambini di fare alcune valutazioni, che ha poi rispetto delle valutazioni che fanno, che è un'occasione per confrontarsi sulle scelte, che ci sono una serie di conoscenze ed abilità matematiche in gioco.
96. R: *Hai letto e analizzato i 7 problemi. Ora componi una graduatoria, mettendo al primo posto il problema che ti piace di più e all'ultimo quello che ti piace di meno. Motiva le tue scelte*
97. I: Nel mio ordine di gradimento metterei:

Primo: Le monete

Secondo: Il giardino di Torquato

Terzo: Il rettangolo e Rocco

Quinto: Una mostra in aula (non nominato)
Sesto: Il commerciante
Settimo: Gli alunni di Anna.

98. R: *Componi ora una seconda graduatoria, mettendo al primo posto il problema che ritieni più adatto per gli alunni della tua futura classe quinta e all'ultimo quello che ritieni meno adatto. Motiva le tue scelte.*
99. I: Stesso ordine
100. R*: Esistono, secondo te, alunni che sono buoni risolutori? Se hai risposto sì, quali elementi caratterizzano, secondo te, un alunno che è un buon risolutore.*
101. I: Si. Eh…Innanzitutto ha delle buone capacità, innanzitutto ce l'hanno… Perché io mi rendo conto che su queste cose sono quelle dove noi possiamo dare dei metodi per impostare le cose, possiamo dare…, ma poi alla fine ci rendiamo conto che ci sono coloro che già lo sanno fare senza che ancora il lavoro è stato fatto e altri che, nonostante il lavoro fatto, non riescono ad essere dei buoni risolutori. Immagino che a volte tengono le cose in aria, senza costruirsi una rappresentazione mentale, senza cominciare a fermare le cose su un foglio. Se inizia una storia e ci sono tre bambini, io comincio a mettere tre punti su un foglio. Se poi si dice che uno è più basso dell'altro, io metto una freccia che dall'uno va verso l'altro.
102. R: *Può un insegnante aiutare un suo alunno a diventare un buon risolutore? Se si, esponi cosa un insegnante potrebbe fare?*
103. I: Io penso che possa dare degli strumenti per rappresentare la realtà, per rappresentarla matematicamente. Uno dice: "Dobbiamo contare velocemente i banchi a uno a uno; come ce li immaginiamo, come li raggruppiamo, come li calcoliamo? Questo aspetto di passare da un testo a una rappresentazione mentale e grafica mi sembra sempre un buon inizio": Io dico che sollecita e poi fornisce alcuni strumenti [*chiedo il significato di strumenti*]. Quando ci sono dei problemi che richiedono un'addizione, io in genere dico: "Qua dentro ci sono questi, e faccio un recinto, qua ci sono questi altri…Quelli che mi chiedono stanno in un recinto globale che ingloba tutti e due. Questo poi mi riporta spesso ad una situazione di addizione". Alcuni strumenti me li sono proprio inventati, certe modalità di rappresentare le operazioni. È chiaro poi che ci sono delle situazioni che ti aiutano, che ti danno dei suggerimenti.
104. R: *Quali sono le difficoltà più frequenti che i tuoi alunni incontrano nei problemi?*
105. I: Comprensione del testo.
106. R: *Cosa fai quando qualche tuo alunno incontra difficoltà?*
107. I: Una cosa che faccio è quella di partire da una situazione presentata graficamente. Io dico di costruire il testo di un problema; quindi parto da un'immagine, un disegno. I bambini poi raccontano. Se nella rappresentazione

c'è un punto di domanda, oppure se ci sono dei dati, io una fedeltà la devo mantenere.
108. R: *Tu come ti senti quando il tuo alunno incontra difficoltà?*
109. I: Mi pongo sempre il problema di quale sia il nodo e come posso aiutarli.
110. R*: Sei soddisfatto/a dei testi di problemi presenti sui libri di testo? Se non lo sei, spiega le motivazioni.*
111. I: No, ma non solo dei problemi; anche delle spiegazioni che danno ai bambini. A volte sono fatti veramente male, alcuni.
112. R: *Quali suggerimenti daresti ai responsabili di una casa editrice che intendono migliorare i problemi presenti sui libri di testo.*
113. I: Allora, quella innanzitutto di non dare mai dei criteri: per confrontare due frazioni faccio il prodotto in croce. Ma che vuol dire? Che non mi diano delle regole che non ho modo di ragionarci sopra e capire. Alcune volte ho trovato degli errori nello scrivere i dati, che non li mettano fuori strada. Non possono a titolo di pagina scrivere che quelli sono problemi con la moltiplicazione. Che senso ha? Non posso dare, sul calcolo di una frazione di un numero, dicendo che io divido per 5 perché sono quinti. Divido per 5 perché ne ho 5 di quinti nell'intero. Ci sono delle incapacità addestrate nei libri di testo.
114. R: *Quali argomenti ti piacerebbe approfondire in un corso dedicato alla pratica didattica dei problemi matematici?*
115. I: Questo della concettualizzazione, della rappresentazione mentale: da un discorso che ho letto ad una rappresentazione mentale efficace. Io penso che servano degli strumenti, dei modelli; un esempio: la tabella a doppia entrata.
116. R: *Quali vissuti, emozioni, pensieri ti ha suscitato questa intervista?*
117. I: Io ho continuato a chiedermi a che serve.

Bibliografia

Abelson, R. (1979) Differences between belief sistems and knowledge systems. *Cognitive Science*, 3, pp.355-366.

Andrews, P. (2007). The curricular importance of mathematics. A comparison of English and Hungarian teachers' espoused beliefs. *Journal of Curriculum Studies*, 39 (3), pp. 317-338.

Andrews, P. (2011). The cultural location of teachers' mathematical knowledge: Another hidden variable in mathematics education research? In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.). *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 99-118). New York: Springer.

Andrews, P., Xenofontos, C. (2014). Analysing the relationship between the problem-solving-related beliefs, competence and teaching of three Cypriot primary teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18 (4), pp. 299-325.

Antonietti, A., Ignazi, S., Perego, P. (2000). Metacognitive knowledge about problem-solving methods. *British Journal of Educational Psychology*, 70 (1), pp. 1-16.

Arcavi, A., Friedlander, A. (2007). Curriculum developers and problem solving. The case of Israeli elementary school projects. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39 (5), pp. 355-364.

Artigue, M. (2011). Le sfide dell'insegnamento della matematica nell'educazione di base. *La matematica nella Società e nella Cultura: rivista dell'Unione Matematica Italiana*, I, 4 (2), pp. 211-259.

Asenova, M., Fandiño Pinilla, M.I., Monaco, A. (2012) Come costruire il curricolo verticale. In S. Loiero, M. Spinosi (Eds.) Fare scuola con le Indicazioni. Testo e commento. Didattica e spunti operativi (pp. 83-92). Napoli: Tecnodid Editrice.

Audi, R. (1988). *Belief, Justification and Knowledge*. Belmot (CA): Wadsworth.

Baccaglini Frank, A., Di Martino, P., Natalini, R., Rosolini, G. (2018). *Didattica della matematica*. Mondadori, Milano, pp. 105, 106, 111, 116, 117, 318-319.

Bartolini Bussi, M. G., Boni M. (1995). Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio vygotskiano. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 18(3), pp. 221-256.

Bartolini Bussi, M. G., Boni M., Ferri F., Garuti R. (1999). Early Approach to Theoretical Thinking: Gears in Primary School. *Educational Studies in Mathematics*, 39, pp. 67-87.

Bassarear, T. (1989). The interactive nature of cognition and affect in the learning of mathematics: two case studies, in Maher C., Goldin G., Davis R. (Eds.). Proceedings of the 11th PME-NA, New-Brunswick.

Benvenuto, G. (2015). *Stili e metodi della ricerca educativa*. Roma: Carocci, pp. 136-137.

Bernardi, C., (1998). Non abbiate paura. In Aschieri I., Pertichino M., Sandri P., Vighi P. (Eds), *Matematica e affettività. Chi ha paura della matematica*? Atti del Convegno nazionale del Grimed «Matematica e difficoltà» n. 8, pp. 1-8. Castel San Pietro Terme, febbraio 1998. Bologna: Pitagora.

Bernardo, A. (2001). Analogical Problem Construction and Transfer in Mathematical Problem Solving, *Educational Psychology*, 21 (2), pp. 137-150.

Baccaglini Frank, A., Di Martino, P., Natalini, R., Rosolini, G. (2018). *Didattica della matematica*. Mondadori, Milano, pp. 105, 106, 111, 116, 117, 318-319.

Blum, W., Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects-state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), pp. 37-68.

Boero, P., Ferrari, P.L. (1988). Rassegna di alcune ricerche sul «problema dei problemi»: loro importanza per l'insegnamento. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 11, 7/8, pp. 659-684.

Bolondi, G., Fandiño Pinilla, M. I. (Eds) (2013). Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica. Napoli: EdiSES, p. 25.

Borasi, R. (1984). Che cosa è un problema? Considerazioni sul concetto di problema e sulle sue implicazioni in didattica della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 7, 1984, n° 2, pp. 83-98.

Borasi, R. (1986). On the Nature of Problems. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 17 (1986), pp. 125-141.

Borko, H., Putnam, R.T. (1996). Learning to teach, in D.C. Berliner, R.C. Calfee (Eds.). *Handbook of Educational Psychology*. New York: Macmillan, pp. 673-708.

Briars, D., Larkin, J. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, 1, pp. 245-296.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 4, pp. 165-198.

Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora Editrice, pp. 4-6

Brousseau, G., D'Amore, B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall'empirico al didattico. Didattica della matematica e azioni d'aula. Atti del XXII Convegno Nazionale: *Incontri con la matematica*. Castel San Pietro Terme, pp. 7-8, 10

Brown, S.I., Walter, M. (1983), *The Art of Problem Solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Burns, R. B., Lash, A. A. (1988). Nine seventh-grade teachers'knowledge and planning of problem-solving instruction. *Elementary School Journal*, 88(4), pp.369-386.

Calderhead, J. (1996). Teachers: Beliefs and knowledge. In D.C. Berliner, R.C. Calfee (Eds.). *Handbook of Educational Psychology*. New York: Macmillan, pp. 709-725.

Cai, J., Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: Research and practice. *ZDM*, 39(6), pp. 459–473.

Campbell, R., Kyriakides, L. (2000). The National curriculum and standards in primary schools: a comparative perspective. *Comparative Education*, 36 (4), pp. 383-395.

Baccaglini, Frank, A., Di Martino, P., Natalini, R., Rosolini, G. (2018). *Didattica della matematica*. Mondadori, Milano, pp. 105, 106, 111, 116, 117, 318-319.

Charalambous, C., Philippou, G. (2010). Teachers'concerns and Efficacy Beliefs about Implementing a Mathematics Curriculum Reform: Integrating two Lines of Inquiry. *Educationals Studies in Mathematics*, 75 (1), pp.1-21.

Carey, S. (1999). Sources of conceptual change. In E. Scholnick, K. Nelson, S. Gelman, P. Miller (Eds.). *Conceptual Development* (pp. 292-326). Lawrence Erlbaum. London.

Chapman, O. (2006). Classroom Practices for Context of Mathematics Word Problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62 (2), pp. 211-230.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage

Chevallard, Y. (1988). Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation, Institute de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques d'Aix-Marseille, Aix-en-Provence-Marseille.

Claparède, È. (1933). La genèse de l'hypothèse. *Archives de Psychologie*, vol. 24 (93-94), pp. 1-155 (tr. It. La genesi dell'ipotesi. Firenze: Giunti – Barbera, 1972).

Clark, C., Peterson, P.S. (1986). Teachers thought Processes. In M.C. Wittrock (Ed.). *Handbook of Research on Teaching* (3rd ed.) (pp. 255-296). New York: Macmillan.

Cohen, D. (1990). A revolution in one classroom: The case of Mrs. Oublier. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 12 (3), pp. 311-329.

Cohen, L., Manion, L. (1994): *Research Methods in Education*, London: Routledge.

Cooney, T. J. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education,* 16 (5), pp. 324-336.

Crespo, S., Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11 (5), pp. 395-415.

Dewey, J. (1916, trad. It. 1949). *Democrazia e educazione*. Firenze: La Nuova Italia.

Dewey, J. (1929, trad. It. 1952). *Le fonti di una scienza dell'educazione*. Firenze: La Nuova Italia.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto"*. Bologna: Archetipolibri.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I. (2009). L'effetto Topaze. Analisi delle radici ed esempi concreti di una idea alla base delle riflessioni sulla didattica della matematica. *La matematica e la sua didat*tica. Anno 23, numero 1, pp. 35-59.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Docet, pp. 12, 13, 25.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I. (2006). Che problema i problemi! *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 6, vol. 29 A-B, pp. 645-664.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I. (2004). Cambi di convinzioni in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, pp. 27-50.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Marazzani, I. (2004). "Esercizi anticipati" e "zona di sviluppo prossimale": comportamento strategico e linguaggio comunicativo in attività di problem solving. *La matematica e la sua didattica*. 2, pp. 71-95.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I. (2009). La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale. In F. Frabboni, M.L. Giovannini. *Professione insegnante* (pp. 145-153). Milano: FrancoAngeli.

De Corte, E. (1995). Fostering cognitive growth: A perspective from research on mathematics learning and instruction. *Educational Psychologist*, 30 (1), pp. 37–46.

De Corte, E., Verschaffel, L., Op't Eynde, P. (2000). Self-regulation: A characteristic and a goal of mathematics learning. In M. Boekaerts, P. Pintrich, M. Zeidner (Eds.), *Handbook of Self-regulation* (pp. 687–726). San Diego: Academic Press.

De Corte, E. (2004). Mainstreams and perspectives in research on learning (mathematics) from instruction. *Applied Psychology: An International Review*, 53 (2), pp. 279–310.

De Corte, E., Verschaffel, L., Depaepe, F. (2008). Unraveling the relationship between students'mathematic-related beliefs and the classroom culture. *European Psychologist*, 13 (1), pp. 24-36.

Depaepe, F., De Corte, E., Verschaffel, L. (2010). Teachers' approaches to wards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher Education*, 26 (2), pp. 152–160.

D'Aprile, M., Ferrari, P. L. (2003). Linguaggi e rappresentazioni nella formazione degli insegnanti di matematica. *La matematica e la sua didattica*, 4, pp. 1-21.

Di Martino, P. (2001). Emozioni e problem solving: un confronto tra bravi e cattivi risolutori. In E. L. Livorni, G. Meloni, A. Pesci (Eds). *Le difficoltà in matematica: da problema di pochi a risorsa per tutti* (pp. 89-96) Bologna: Pitagora Editrice.

Di Martino, P. (2004). *Difficoltà in matematica e sistemi di convinzioni*. Tesi di dottorato. Università degli studi di Pisa, pp. 98, 99, 100.

Di Martino, P., Zan, R. (2005). Raccontare il contare: l'incontro-scontro con la matematica nei resoconti degli allievi. In P. Gisfredi (Ed.). *Itinerari tra storie e cambiamento: momenti e processi formativi* (pp. 105-124). Bologna: Clueb Editrice.

Di Martino, P. (2015). I fattori affettivi e il loro ruolo nell'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 38 A-B (3), pp. 343-362.

Di Martino, P. (2016). Problem solving e argomentazione matematica. *Didattica della matematica. Dalle ricerche alle pratiche d'aula,* 1, pp. 23-37.

Di Martino, P., Zan, R. (2017). *Insegnare e apprendere la matematica con le Indicazioni nazionali*. Ebook. Firenze: Giunti Scuola.

Dumont, B. (1982). L'influence du 'décor' et du langage dans des épreuves de type 'logique' portant apparemment sur l'implication. *Educational Studies in Mathematics*, 13 (4), pp. 409-429.

Duncker, K. (1935). Zur Psychologie des produktiven Denkens. Berlin: Springer (tr. it. La psicologia del pensiero produttivo. Firenze: Giunti-Barbera, 1969).

Ernest, P. 1989. The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of Education for Teaching,* 15 (1), pp. 13-33.

Fandiño Pinilla, M.I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica. Valutare e intervenire in modo mirato e specifico.* Trento: Erickson, pp. 12-13, 61, 67-71.

Ford, M. (1994). Teachers' beliefs about mathematical problem solving in the elementary school. *School Science and Mathematics*, 94 (6), pp. 314-332.

Furinghetti, F., Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations of Beliefs. In G.C. Leder, E. Pehkonen, G. Törner (Eds.). *Beliefs: A hidden Variable in Mathematics Education*, pp. 39-57. Dordrecht, The Netherlans: Kluwer.

Gagné, R. M. (1973). *Le condizioni dell'apprendimento*. Roma: Armando. (Ediz. orig. 1965, New York: Holt, Rinehart & Winston), pp. 257-258.

Gardner, H. (1991). The Unschooled Mind: How children think and how schools should teach. New York: Basic Books (trad. it. Educare al comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico. Milano: Feltrinelli, 1993).

Garofalo, J., Kroll, D., Lester, F. K. (1987). Metacognition and mathematical problem solving: preliminary research findings. In Proceedings of the XI Conference of the *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Montreal, Canada, 19-25 luglio 1987), II (pp. 222-228).

Genishi, C., Di Paolo, M. (1982). Learning Through Argument in a Preschool, in L.C. Wilkinson (Ed.). *Communication in the Classroom*. New York: Academic Press.

Glaser, B. G., Strauss, A. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine.

Goldin, G. 2002. Affect, meta-affect, and mathematical belief structures. In G. Leder, E. Pehkonen, G. Törner (Eds) *Beliefs: A hidden Variable in Mathematics Education*? Dordrecht: Kluwer.

Guberman, R., Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teacher' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16 (1), pp. 33–56.

Green, T. F. (1971). *The activities of teaching*. New York: McGraw-Hill.

Grigutsch, S., Torner, G. (1998). World views of mathematics held by university teachers of mathematics science. *Schriftenreihe des Fachbereichs Mate*matik, Preprint 420. Duisburg: Gerhard Mercator University.

Grouws, D. A., Good, T. A., Dougherty, B. J. (1990). Teacher conceptions about problem solving and problem-solving instruction. In G. Booker, P. Cobb, T. N. de Mendicuti (Eds.), Proceedings of the Annual Conference of the *International Group for the Psychology of Mathematics Education with the North American*, Chapter 12th Pme-Na Conference (14th, Mexico, July 15-20, 1990), 1, pp. 135–142.

Haylock, D., Cockburn, A. D. (2008). *Understanding Mathematics for Young Children: A Guide for Foundation Stage and Lower PrimaryTteachers*. Sage.

Halmos, P. (1975). The problem of learning to teach. *The American Mathematical Monthly*, 82 (5), pp. 466-476.

Kanizsa, G. (1973). Il «problem- solving» nella psicologia della Gestalt. In Mosconi G., D'Urso V. (Eds). *La soluzione di problemi* (pp. 35-87). Firenze: Giunti Barbera.

Karp, A. (2010). Analyzing and attempting to overcome prospective teachers' difficulties during problem solving instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13 (2), pp. 121–139.

Kyriakides, L., Charalambous, C., Philippou, G., Campbell, R. (2006). Illuminating reform evaluation studies through incorporating teacher effectiveness research: A case study in mathematics. *School Effectiveness and School Improvement*, 17(1), pp. 3–32.

Köhler, W. (1917). *Intellikgenzprüfungen an Anthropoiden*, Springer, Berlin (tr. it. L'intelligenza nelle scimmie antropoidi, Giunti, Firenze, 2009).

Kush, T. M., & Ball, D. L. (1986). *Approaches to teaching mathematics: Mapping the domain of knowledge, skills and dispositions.* East Lansing: Michigan State University, Center on Teacher Education.

Leikin, R. (2003). Problem-solving Preferences of Mathematics Teachers: Focusing on Symmetry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6 (4), pp. 297–329.

Leikin, R., Kawass, S. (2005). Planning teaching an unfamiliar mathematics problem: the role of teachers' experience in solving the problem and watching pupils solving it. *Journal of Mathematical Behavior*, 24 (3–4), pp. 253–274.

Leikin, R., Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 66 (3), pp. 349–371.

Leont'ev, A.N. (1975/1977). *Attività, coscienza, personalità*. Firenze: Giunti Barbera.

Lester, F. K., Charles, R. I. (1992). A framework for research on problem-solving instruction. *In Mathematical Problem Solving and New Information Technologies*. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 1-15.

Lester, F. K., Garofalo, J., Kroll, D. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: key influences on problem-solving behavior. In D. McLeod, V.M. Adams (Eds.). *Affect and Mathematical Problem Solving* (pp. 75-88). New York: Springer.

Lindgren, S. (1999). Plato, knowledge and mathematics education. In G. Philippou (Ed.), *MAVI-8 Proceedings* (pp. 73-78). Nicosia: University of Cyprus.

Loiero, S., Spinosi M. (Eds) (2012): *Fare scuola con le Indicazioni. Testo e commento. Didattica e spunti operativi*. Napoli: Tecnodid Editrice, pp. 15 - 83.

Lumbelli, L. (1984). Qualità e quantità nella ricerca empirica in pedagogia. *Manuale critico della sperimentazione e della ricerca educativa*, pp. 101-133.

Ma, X., Kishor, N. (1997). Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: A meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education* 28 (1), pp. 26-47.

Malara, N.A. (1993). Il problema come mezzo per promuovere il ragionamento ipotetico e la metaconoscenza. *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 16 (10), pp. 928-954.

Malara, N., & Zan, R. (2008). The complex interplay between theory in mathematics education and teacher's practice: Reflections and examples. *Handbook of International Research in Mathematics Education*, pp. 535-560.

Malmivuori, M.-L. (2001). *The dynamics of affect, cognition, and social environment in the regulation of personal learning processes: The case of mathematics*. Unpublished doctoral dissertation. University of Helsinki, Finland.

Maher, C. A., Muter, E. M., Kiczek, R. D. (2008). The development of proof making by students, in P. Boero (Ed.). *Theorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice*, pp. 43-62; 197-208. Rotterdam: Sense Publishers.

McLeod, D. (1985). Affective issues in research on teaching mathematical problem solving, in E. Silver. (Ed.) *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

McLeod, D. (1989a). The role of affect in mathematical problem solving, in D. McLeod, V. Adams (Eds.). *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*, New-York: Springer-Verlag.

McLeod, D. (1989b). Beliefs, attitudes, and emotions: new views of affect in mathematics education, in D. McLeod, V. Adams (Eds.). *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*, New-York: Springer-Verlag.

McLeod, D.B., Metzger, W., Craviotto, C. (1989). Comparing experts' and novices' affective reactions to mathematical problem solving: an exploratory study. Proceedings of the 13th Conference of the *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Paris, France, vol. 2, pp. 296-303.

McLeod, D. (1992): 'Research on affect in mathematics education: a reconceptualization', in D. Grouws. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching*, New-York: MacMillan

Metallidou, P. (2009). Pre-service and in-service teachers' metacognitive knowledge about problem-solving strategies. *Teaching and Teacher Education*, 25 (1), pp. 76–82.

Moser, J. M. (1985). *Analisi delle strategie di risoluzione dei problemi verbali. Numeri e operazioni nella scuola di base,* Bologna, Zanichelli-UMI, pp. 61-85.

Nesher, P., Katriel, T. (1977). A semantic analysis of addition and subtraction word problems in arithmetic. *Educational Studies in Mathematics*, 8 (3), pp. 251-269.

Nesher, P. (1980). The stereotyped nature of school word problems. *For the learning of math*ematics,1 (1), pp. 41-48.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. In T. P. Carpenter, J.M. Moser, T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Lawrence 6 Erlbaum, 1982, pp. 25-38.

Nesher, P. (1986). Are Mathematical Understanding and Algorithmic Performance Related? *For the Learning of Mathematics*, 6 (3), pp. 2-9.

OCSE-OECD (2001). *Knowledge and skills for life. First results from Pisa 2000*. Paris: OECD.

Osana, H., Lacroix, G., Tucker, B., Desrosiers, C. (2006). The role of content knowledge and problem features on preservice teachers' appraisal of elementary mathematics tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9 (4), pp. 347–380.

Pehkonen, E. (1993). What are Finnish teacher educators' conceptions about the teaching of problem solving in mathematics? *European Journal for Teacher Education*, 16 (3), pp. 237–256.

Pehkonen, E. (2017). Finnish elementary teachers' conceptions on problem solving in mathematics teaching ' *La Matematica e la sua Didattica*, vol. 25, nº 1, pp. 13-27.

Pehkonen, E., Pietilä, A. (2003). *On relationships between beliefs and knowledge in mathematics education*. In Proceedings of the CERME-3, Bellaria meeting.

Perrenoud, P. (1999, trad. it. 2002). *Dieci nuove competenze per insegnare. Invito al viaggio*. Roma: Anicia.

Pietilä, A. 2002. Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkakuva: Thematic Group 2 EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION III E. Pehkonen, A. Pietilä. Matematiikkakokemukset matematiikkakuvan muodostajina [Pre-service elementary teachers' views of mathematics: The role of mathematics experiences in forming the views of mathematics].

Pirie, S. E. B., Schwarzenberger, R. L. E. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in mathematics*, 19 (4), pp. 459-470.

Poli, P. Zan, R. (1996a). Il ruolo delle convinzioni nella risoluzione di problemi: presentazione di un questionario elaborato per un'indagine nella scuola elementare. *La matematica e la sua didattica*, 4, pp. 440-466.

Poli, P. Zan, R. (1996b). Le convinzioni dei bambini sui problemi: un confronto tra bravi e cattivi risolutori. *Studi di Psicologia dell'Educazione*, 1-2, pp. 62-74.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press, Princeton (trad. it. Come risolvere i problemi di matematica. Utet Università Torino, 2016), p. 119.

Pontecorvo, C., Ajello, A. M., Zucchermaglio, C. (2004). *Discutendo si impara*. Roma: Carocci, pp. 31, 34, 75, 76, 83, 217, 218.

Richardson, V. (Ed.) (2002). *Handbook of Research on Teaching* (4th ed.). AERA. Washington, DC.

Richardson, V. (1996). The role of attitudes and beliefs in learning to teach, in J. Sikula, T. J. Buttery, E. Guyton (Eds.). *Handbook of Research on Teacher Education*. A project of the Association of Teacher Educators (pp. 102-119). New York, NY: Macmillan Library.

Ryve, A., Hemmi, K., Borjesson, M. (2011). Discourses about school-based mathematics teacher education in Finland and Sweden. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 57(2), pp.132–147.

Rokeach, M. (1960). *The Open and Closed Mind: Investigations into the Nature of Belief Systems and Personality Systems*. New York: Basic Books)

Sbaragli, S. (2011). Le competenze nell'ambito della matematica. *Difficoltà in matematica*. 7/2, pp. 143-156.

Schön, D. A. (1983, trad. it. 1993). *Il professionista riflessivo. Per una nuova epistemologia della pratica*. Bari: Dedalo.

Shavelson, R., Stern, P. (1981). Research on teachers pedagogical thoughts, decisions and behavior. *Review of Educational Research*, 51, pp. 455-498.

Shon, R., Stern, P. (1981). Research on Teachers Pedagogical Thoughts, Decisions and Behavior. *Review of Educational Research*, 51, pp. 455-498.

Shulman, L.S., Elstein, A.S. (1975). Studies of problem solving judgment, and decision-making. *Review of Research in Education*, Vol.3, pp. 3-42).

Schoenfeld, A.H. (1983a). Episodes and executive decisions in mathematical Problem-Solving. In R. Lesh, M. Landau (Eds). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 345-395). New York, NY: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1985b). *Mathematical problem solving*. Academic Pres, New York.

Schoenfeld, A.H. (1987). What's all the fuss about metacognition?, in A. Schoenfeld (ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 189-215). Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In Grows D. A. (ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York, NY: Macmillan.

Schoenfeld, A. (2004). The math wars. *Educational Policy*, 18 (1), pp. 253–286.

Schoenfeld, A. (2007). Problem solving in the United States, 1970–2008: Research and Theory, Practice and Politics. *ZDM*, 39 (5), pp. 537–551.

Schoenfeld, A. (2012). Problematizing the didactic triangle. *ZDM*, 44 (5), pp. 587–599.

Schoenfeld, A. H. (2015). *Teaching for Robust Understanding of Essential Mathematics*. In project IMPULS symposium, essential mathematics for the next generation: What to teach and how should we teach it. Tokyo.

Sfard, A. 1991. On the dual nature of the mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 1–36.

Silver, E., Ghousseini, H., Gosen, D., Charalambous, C., Strawhun, B. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, 24 (3–4), pp. 287–301.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, pp. 20-26.

Skott, J. (2009). Contextualising the notion of 'belief enactment'. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12 (1), pp. 27-46.

Skott, J. (2013). Understanding the role of the teacher in emerging classroom practices: Searching for patterns of participation. *ZDM*, 45 (4), pp. 547–559.

Strauss, S., Ravid, D., Magen, N., Berliner, D. C. (1998). Relations between teachers' subject matter knowledge, teaching experience and their mental models of children' s minds and learning. *Teaching and Teacher Education*, 14 (6), pp. 579–595.

Taplin, M., Chan, C. (2001). Developing problem-solving practitioners. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4 (4), pp. 285–304.

Thompson, A. (1984). The relationship of teachers conceptions of mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15 (2), pp. 105–127.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In A. D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Pehkonen, E., Hannula, M. S., Björkqvist, O. (2007). Problem solving as a tea ching method in mathematics education. In E. Pehkonen, M. Ahtee, J. Lavonen (Eds.), *How Finns learn mathematics and science* (pp. 119–129). Rotterdam-Taipei: Sense Publishers.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press, Princeton (trad. it. Come risolvere i problemi di matematica. Utet Università Torino, 2016), p. 119.

Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery*. New York: Wiley (trad. it. La scoperta matematica. Milano: Feltrinelli, 1971, vol. 2), p. 272.

Törner, G., Grigutsch, S. (1994). Mathematische Weltbilder bei Studienanfängerneine Erhebung. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 15 (3/4), pp. 211-251.

Trinchero, R. (2002). *Manuale di ricerca educativa*. Milano: Franco Angeli, pp. 316-17.

Vannini, I. (2009). Ricerca empirico-sperimentale in Pedagogia: alcuni appunti su riflessione teorica e sistematicità metodologica. *Ricerche di pedagogia e didattica*, *4*(1), pp. 1000-1025.

Vannini, I. (2012). Come cambia la cultura degli insegnanti. Metodi per la ricerca empirica in educazione. Milano: FrancoAngeli, pp. 49-50.

Verschaffel, L., De Corte, E., Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school word problems. *Learning and Instruction*, 7 (4), pp. 339–359.

Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems*. Lisse, The Netherlands, p. 24.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24 (3), pp. 335–359.

Vygotskij, L.S. (1960/1974). *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori*. Firenze: Giunti Barbera.

Vosniadou, S. (1994). Capturing and Modeling the Process of Conceptual Change. In Vosniadou (ed.). Special Issue on Conceptual Change. *Learning and Instruction*, 4, pp. 45-69.

Xenofontos, C., Andrews, P. (2012). Prospective teachers' beliefs about problem-solving: Cypriot and English cultural constructions. *Research in Mathematics Education*, 14 (1), pp. 69–85.

Watson, A., Barton, B. (2011).Teaching mathematics as the contextual application of mathematical modes of enquiry. In T. Rowland, K. Rithven (Eds). *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 65-82). London: Springer.

Wilkins, J. (2008). The relationship among elementary teachers' content knowledge, attitudes, beliefs, and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(2), pp. 139–164.

Zammuner, V. L., (1998). *Tecniche dell'intervista e del questionario*. Bologna: Il Mulino, pp. 68, 73, 308

Zan, R. (1991-1992). I modelli concettuali di problema nei bambini della scuola elementare. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, 1991, 14, (7 e 9), pp. 659-677, 870-840; 1992, 15 (1), pp. 39-53.

Zan, R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Bologna: Pitagora Editrice, pp. 2-3.

Zan, R. (2000). *L'insegnante come solutore di problemi. La matematica e la sua didattica* 1. Bologna: Pitagora Editrice, pp. 48-71.

Zan, R. (2010[2]). *Difficoltà in matematica (osservare, interpretare, intervenire).* Milano: Springer, pp. 274, 122-123, 147, 148, 153, 156, 160, 161, 163, 259, 264.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Roma: Carocci Faber, pp. 19-20, 21, 22, 24, 25, 26.

Sitografia

Di Donato D., (2018). *Il digitale è ormai "competenza di base", le nuove rac comanda zioni del Consiglio Ue*. Disponibile in: https://www.agendadigitale.eu/cultura-digitale/competenze-digitali/il-digitale-e-ormai-competenza-di-base-le-nuove-raccomandazioni-del-consiglio-ue/

MIUR (2007), Indicazioni Nazionali per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione. Disponibile in: https://archivio.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/allegati/dir_310707.pdf.

NCTM (2010). *Why is teaching with problem solving important to student learning*? Disponibile in: http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_and_Advocacy/research_brief_and_clips/Research_brief_14_-_Problem__solving.pdf.